PONTES E GRANDES ESTRUTURAS

TARSO LUÍS CAVAZZANA

Engenheiro Civil, Mestre em Recursos Hídricos e Tecnologias Ambientais, MBA em Gestão Empresarial

tarsocavazzana@yahoo.com.br

Plano de ensino

- **CARGA HORÁRIA SEMANAL:** 02 Horas/Aula (02 Teoria)
- **CARGA HORÁRIA SEMESTRAL**: 40 Horas

DESENVOLVIMENTO DA DISCIPLINA

- Explanação em sala de aula utilizando quadro negro e giz como recursos audiovisuais tais como “Datashow”, filmes, projetor de slides, retroprojetor, etc. Visitas técnicas à obras envolvendo construção de pontes, estradas, etc.

EMENTA

- Tipos de pontes e viadutos.
- Trem-tipo e Veículo-tipo.
- Normas técnicas de projeto de pontes.
- Pontes em arco, estaiadas, suspensas e treliçadas.
- Cálculo estrutural da infraestrutura, megaestrutura e superestrutura das pontes.
- Aparelhos de apoio.
- Aparelhos de apoio.
- Manutenção das pontes.
- Estruturas de aeroportos, usinas hidrelétricas e metrôs.

OBJETIVOS GERAIS

- Apresentar os conceitos básicos necessários à elaboração dos projetos básicos executivos de estruturas de grande porte em obras civis, abrangendo pontes e viadutos, lajes das pistas de aeroportos internacionais, estruturas de Usinas Hidrelétricas e de estações de metrôs.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Capacitar o aluno para a elaboração de projetos estruturais de pontes, viadutos, aeroportos, usinas hidrelétricas e metrôs, habilitando-o a responder profissionalmente pelas suas estruturas.

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

- Projeto geométrico das pontes e viadutos.
- Cálculo estrutural da infraestrutura das pontes: Tubulões, Estacas e Sapatas.
- Cálculo estrutural da meso-estrutura das pontes.
- Cálculo estrutural do tabuleiro das pontes rodoviárias e ferroviárias.
- Dimensionamento dos encontros e dos aparelhos de apoio.
- Dimensionamento de lajes protendidas de aeroportos internacionais.
- Dimensionamento estrutural de tomadas d’água, casas de força e vertedouros de usinas hidrelétricas.

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

- Dimensionamento estrutural de obras subterrâneas de estações de metrôs.

AVALIAÇÃO

- MF=(0,7*(P1+P2)/2)+0,3*MTR
- MF = Média final
- P1= Nota da Prova 1
- P2= Nota da Prova 2
- MTR= Média aritmética de Trabalhos e Relatórios

- Exame final tem que tirar no mínimo o complementar de MF para 10.

BIBLIOGRAFIA - Básica

- FREITAS, MOACYR; **“Infraestrutura de Pontes de Vigas”,** Editora Edgard Blucher,
- São Paulo. 2001.
- LEONHARDT, **“Princípios Básicos da Construção de Pontes de Concreto”,** Editora Interciência, Rio de Janeiro, 1979.
- MARCHETTI, OSVALDEMAR, **“Pontes de Concreto Armado”**, Editora Edgard Blucher, São Paulo, 2000.

BIBLIOGRAFIA - Complementar

- SANTOS, A. **“Estruturas Metálicas. Projeto e Detalhes para Fabricação”,** Editora Mc Graw-Hill, São Paulo, 1977.
- SORIANO, HUMBERTO LIMA; **“Análise das Estruturas: Método”,** Editora Ciência Moderna”, Editora Ciência Moderna, São Paulo, 2006.
- SORIANO, HUMBERTO LIMA; **“Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas”**, Editora Ciência Moderna, São Paulo, 2003.

BIBLIOGRAFIA - Complementar

- CARVALHO, R.C.; PINHEIROS, L.M.; **“Cálculo e Detalhamento de Estruturas de Concreto Armado”**, Volumes 1 e 2, Editora PINI, São Paulo, 2004.
- PFEIL, W, PFEIL, M. **“Estruturas de Aço - Dimensionamento Prático”**, Editora
- LTC, Rio de Janeiro, 2000.

1 – INTRODUÇÃO E CONCEITOS FUNDAMENTAIS.

1.1 Curso

1.2 Conceitos e definições

1.3 Etapas do projeto

1.4 Materiais Empregados

1.5 Principais sistemas estruturais

1.6 Classificação quanto a execução

2 - AÇÕES A CONSIDERAR EM PONTES DE CONCRETO SEGUNDO A NORMA BRASILEIRA

2.1 cargas permanentes.

2.1.1 peso próprio,

2.1.2 pavimentação,

2.1.3 trilhos, dormentes, lastro ferroviário, guarda-corpos,

2.1.4 empuxos de terra e líquidos,

2.1.5 forças de protensão,

2.1.6 deformações impostas (provocadas por fluência, retração, variações de temperatura e deslocamentos de apoios).

2.2 ações variáveis subdividem-se

2.2.1 cargas verticais,
2.2.2 efeito dinâmico das cargas móveis,
2.2.3 força centrífuga,
2.2.4 choque lateral,
2.2.5 efeitos da frenagem e aceleração,
2.2.6 cargas de construção,
2.2.7 cargas de vento,
2.2.8 empuxo de terra provocado por cargas móveis,
2.2.9 pressão da água em movimento,
2.2.10 efeito dinâmico do movimento das águas, variações de temperatura, ações excepcionais,
2.2.11 choques de objetos móveis
2.2.12 outras ações excepcionais

2.3 Coeficientes de Majoração segundo a NBR

3. AVALIAÇÃO SEM USO DE COMPUTADOR DOS ESFORÇOS SOLICITANTES DEVIDO A CARGA ACIDENTAL NA SUPERESTRUTURAS.

3.**1 Em lajes**

3.**2 Em Vigas**

3.2.1 Determinação do trem tipo Longitudinal
3.2.2 Duas vigas
3.2.3 Vigas Múltiplas
3.2.4 Seção celular.

3.**3 Linha de Influência para determinação dos esforços máximos e mínimos**

3.**4 Uso do Programa FTOOL**

4. AVALIAÇÃO COM USO DE COMPUTADOR DOS ESFORÇOS SOLICITANTES DEVIDO A CARGA ACIDENTAL NA SUPERESTRUTURAS.

4.**1 Procedimentos**

5. EXEMPLOS NUMÉRICOS

6. ESTUDO DOS APARELHOS DE APOIO DE PONTES DE CONCRETO

7. AÇÕES NA MESO E INFRAESTRUTURA

8 DISTRIBUIÇÃO DE ESFORÇOS NOS APARELHOS DE APOIO DE NEOPRENE DEVIDO A APLICAÇÃO DE ESFORÇOS HORIZONTAIS NO TABULEIRO

11 DIMENSIONAMENTO DE NEOPRENE

CURSO DE PONTES

Bibliografia

AASHTO - **American Associaton of State Highway and Transportation Officials, 2001.**

ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas, **NBR6118**, **Projeto de estruturas de concreto**. Rio de Janeiro, 2004.

ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas, **NBR7187**, **Projeto de pontes de concreto armado e de concreto protendido**. Rio de Janeiro, 2003.

ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas, **NBR7188**, **Carga móvel em ponte rodoviária e passarela de pedestre**. Rio de Janeiro, 1984.

ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas, **NBR6123**, **Forças devido ao vento em edificações**. Rio de Janeiro, 1988.

BRAGA, WALTER DE ALMEIDA. **Aparelhos de apoio das estruturas**. Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1986.

CARVALHO R. C. **Contribuição ao cálculo de pontes em balanços progressivos**. Dissertação de Mestrado defendida junto a EESC- USP São Carlos 1987.

CORRÊA, M. R. S.; RAMALHO, M. A. **Sistema laser de análise estrutural.** In: V SIMPÓSIO NACIONAL DE TECNOLOGIA DE CONSTRUÇÃO: SOFTWARE PARA O PROJETO DE EDIFÍCIOS, 1997, São Paulo. Anais.

DEBS, MOUNIR KHALIL EL. **Concreto Pré-Moldado: Fundamentos e Aplicações**. Departamento de Engenharia de Estruturas. Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo.

HAMBLY .E. C. **Bridge Deck Behaviour** London Chapman and Hall 1976.

LEONHARDT, FRITZ. Construções de Concreto: **Princípios Básicos da Construção de Pontes de Concreto-** vol. 6. Editora Interciência Ltda. 1979.

LIMA VANESSA DOS SANTOS- **Estudo comparativo do efeito das ações acidentais usuais móveis com as ações de cálculo em pontes e viadutos de concreto-** relatório 1 de iniciação científica -– processo 05/50662-3 São Carlos Dezembro de 2005

MULLER J. **Design of Box Girder Bridges** Journal of Precast Concrete Institue (1976).

PFEIL, WALTER. **Pontes em concreto armado: elementos de projeto, solicitações superestrutura** – vol.1. 3ª. Edição. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A . Rio de Janeiro, 1983.

SAN MARTIN F. J. – **Cálculo de Tabuleiros de pontes**- Livraria Ciência e Técnicologia São Paulo 1981

CURSO DE PONTES

1.1 Curso

Este texto destina-se a alunos do curso de Engenharia civil E PROFISSIONAIS QUE QUEREM SE ESPECIALIZAR NO ASSUNTO

para que possam conhecer um tipo específico de construção presente há milhares de anos na vida do homem: as pontes, passarela, passagens de nível e viadutos.

Torna-se necessária uma disciplina específica neste assunto pois há características peculiares nas ações, nos procedimentos de cálculo, sistemas estruturais, procedimentos executivos e finalmente principalmente o projeto.

Embora tratando-se de um texto didático que procura também apresentar os procedimentos numéricos de cálculo o texto pode ser acompanhado perfeitamente por engenheiros de obra e outros profissionais que não precisam necessariamente conhecer os procedimentos de cálculo pois diversas informações qualitativas são fornecidas e explicadas no texto.

1.2 Conceitos :

Ponte – Obra destinada a fazer que uma via transponha um obstáculo de água: rio, lago, braço e mar etc...

Viaduto - Obra destinada a fazer que uma via transponha um obstáculo natural (vale garganta etc,) ou outra via. Fundo seco..

Passarela - Obra destinada a fazer que uma via só de pedestre transponha um obstáculo.

Demais travessias : oleodutos; gasodutos, aquedutos

1.3 Etapas do projeto

GEOMETRICO,

TOPOGRÁFICO,

HIDRAULICO,

GEOTÉCNICO,

ESTRUTURAL

Estruturas de pontes

projeto geometrico

gabaritos horizontais e verticais,

inclinação transversal, sobrelargura,

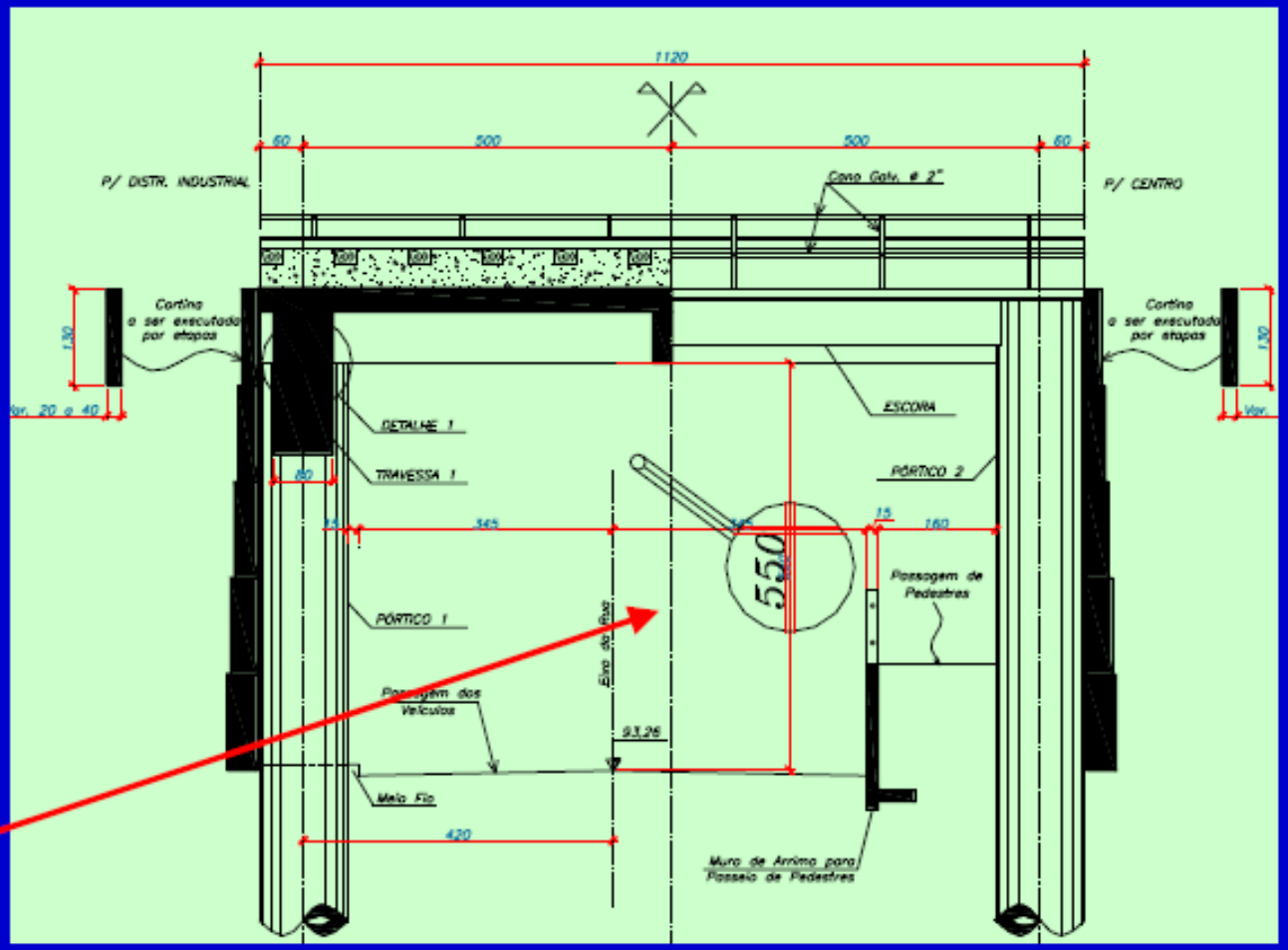
Esconsidade

largura de pista, faixa de tráfego,
faixa e segurança

Curvo em planta ou em elevação

1.3.1-GEOMETRICO: Devem ser respeitadas dimensões tais como: gabaritos horizontais e verticais, largura de pista, faixa de tráfego, faixa e segurança, sobrelargura, inclinação transversal

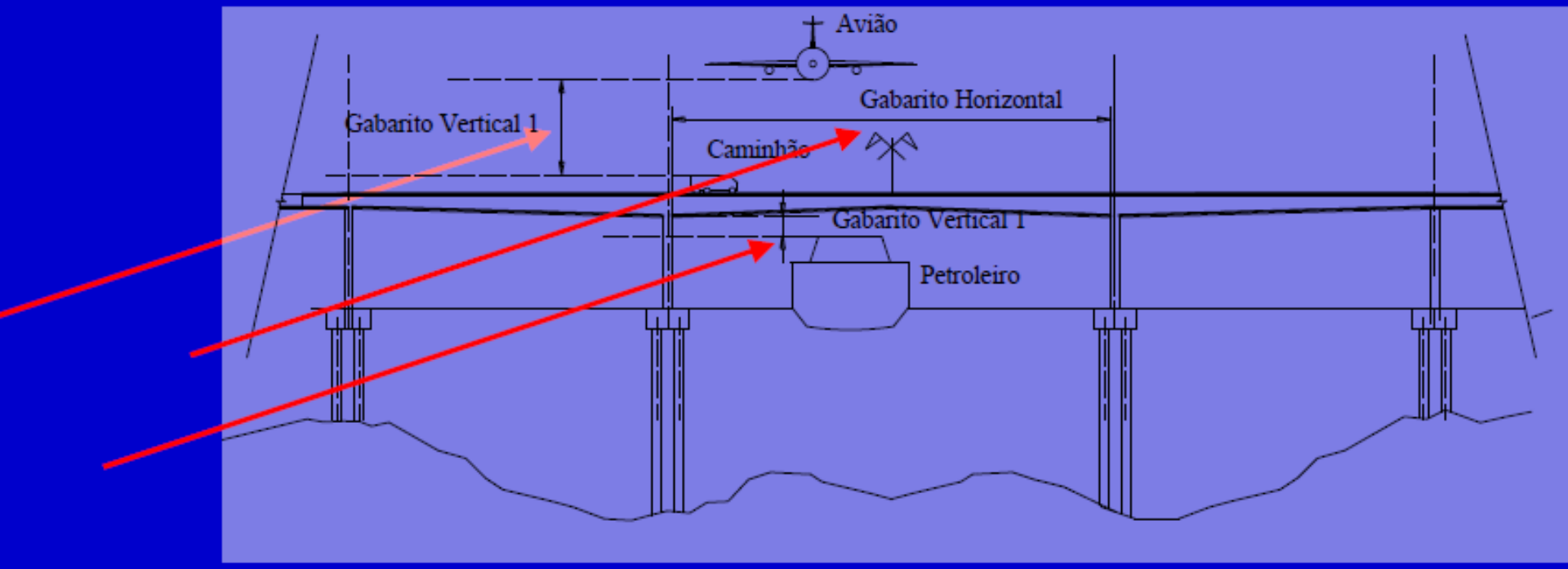
O gabarito vertical é de 5,5m



CURSO DE PONTES

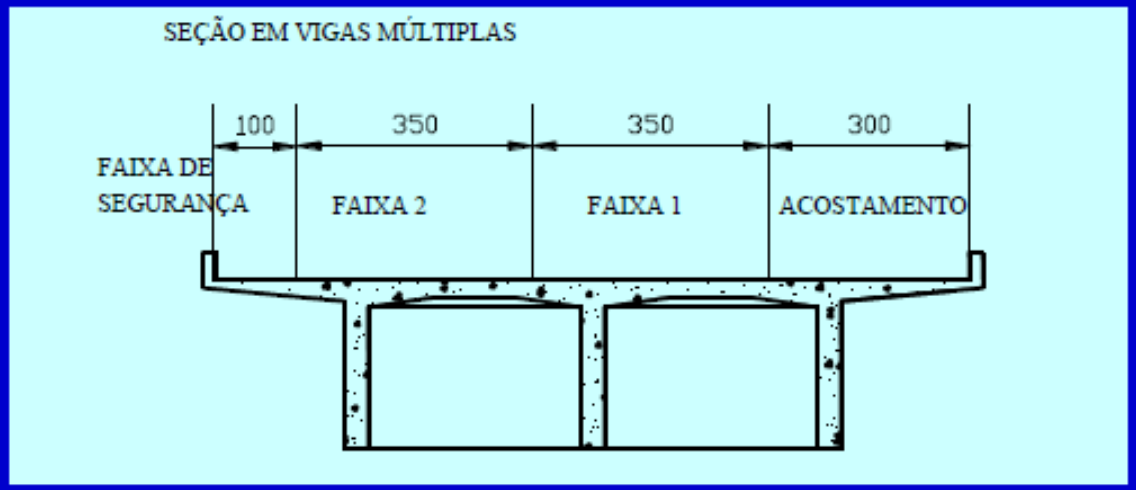
GABARAITOS VERTICAL E HORIZONTAL

PONTE RIO-NITEROI

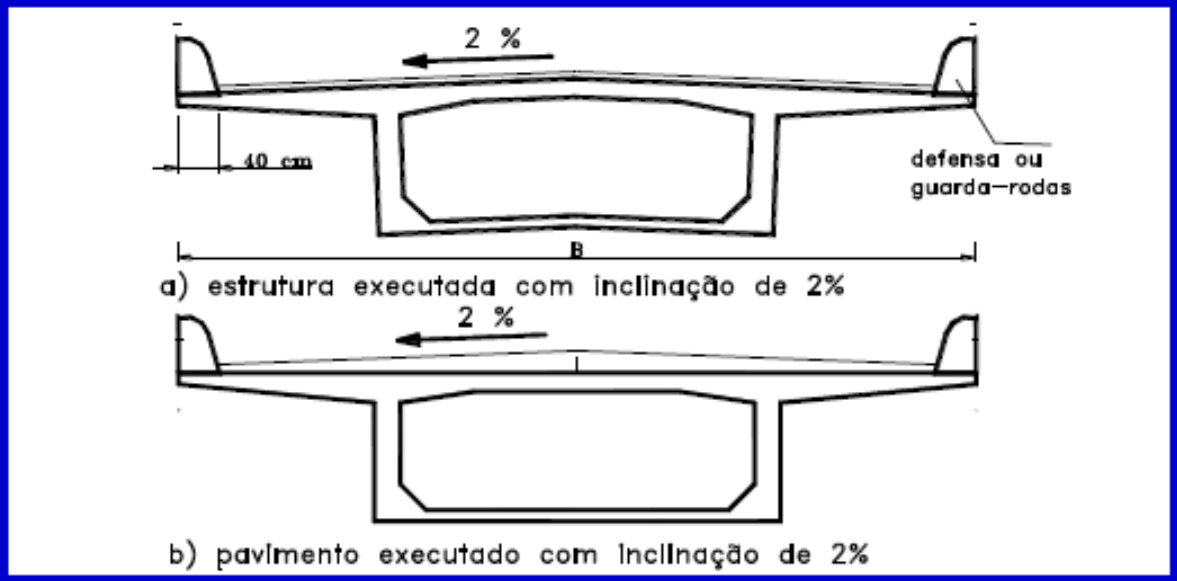


CURSO DE PONTES

Larguras de pista

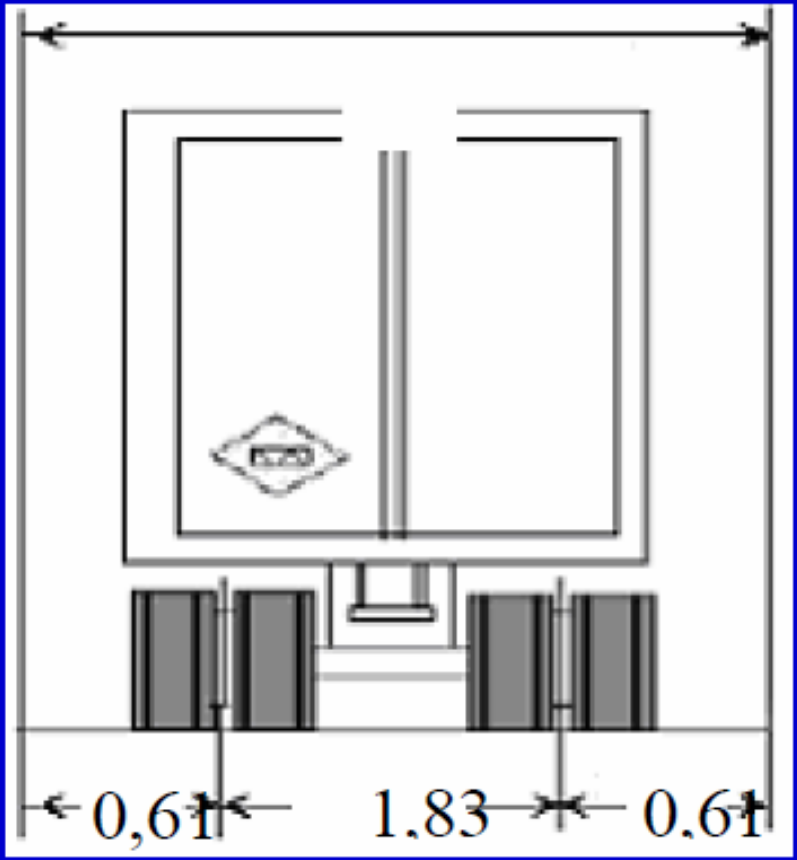


Inclinação para esgotamento de água superficial



superelevação

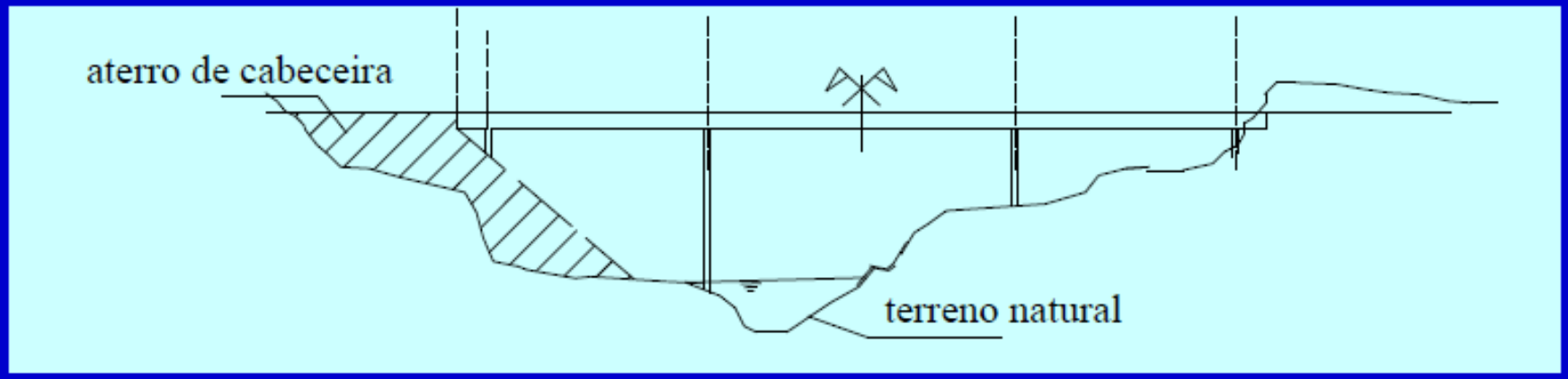
Faixas de tráfego



1.3.2-TOPOGRÁFICO

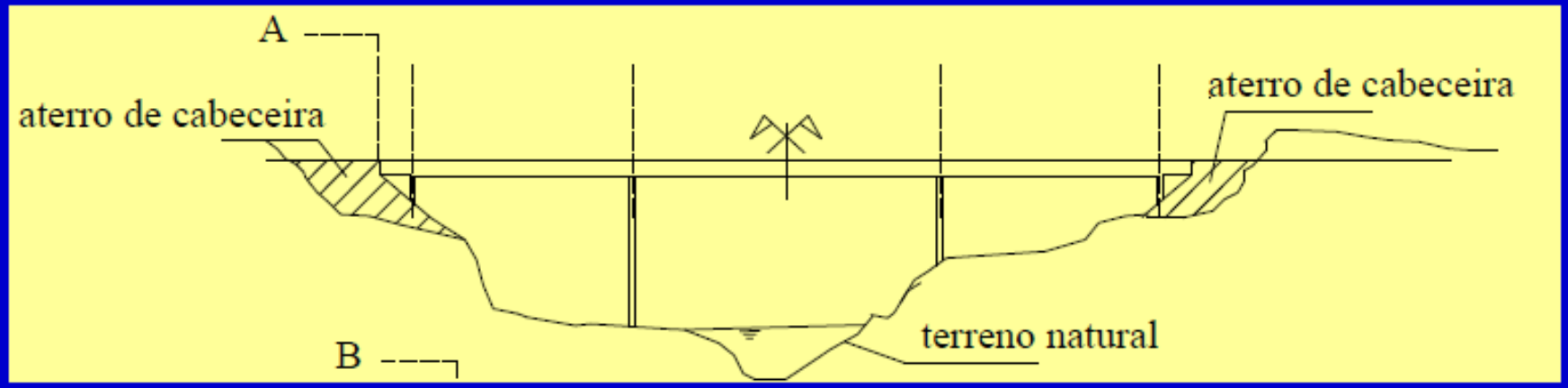
Um mesmo projeto

Solução 1



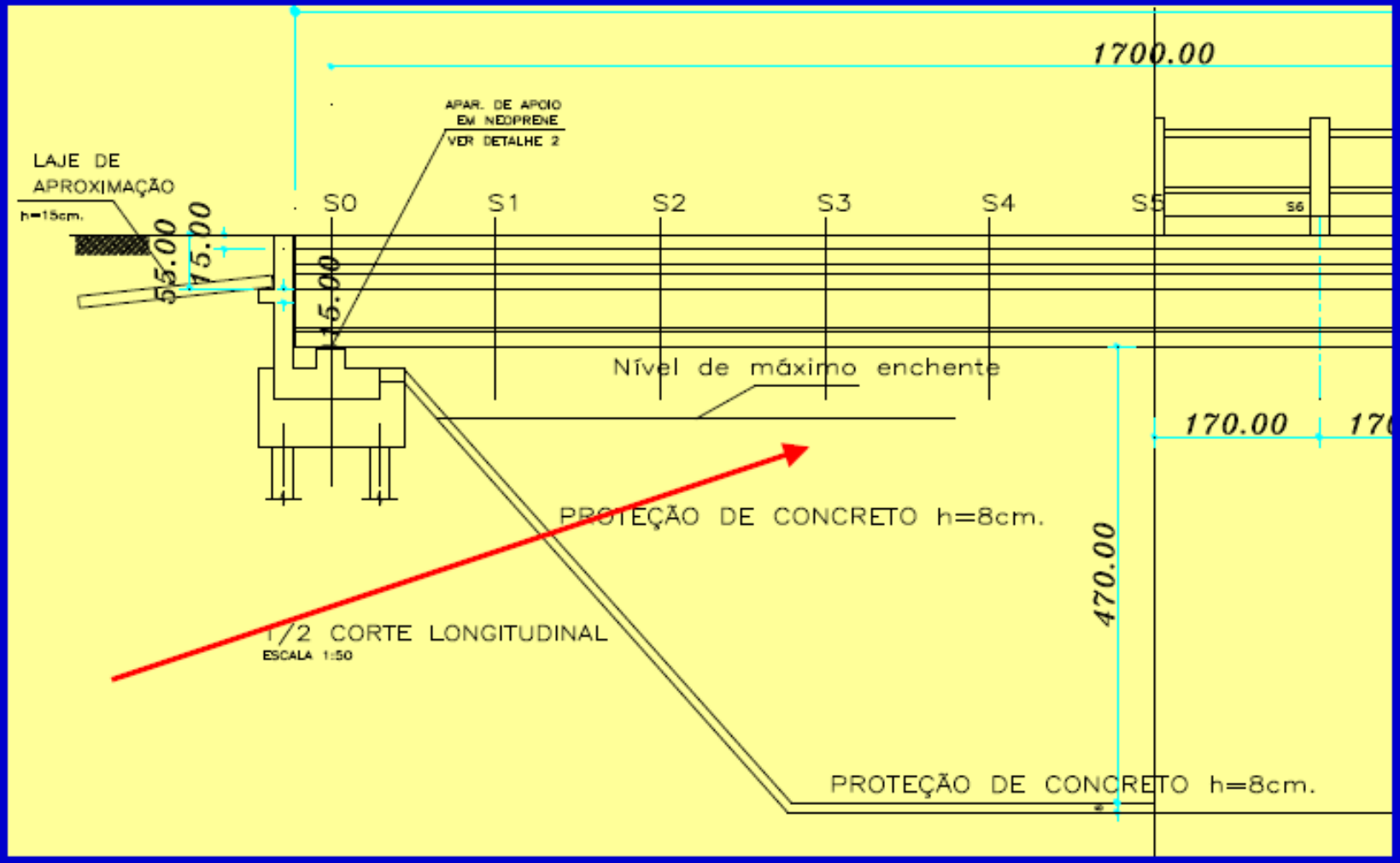
Solução 2

Última solução bem melhor



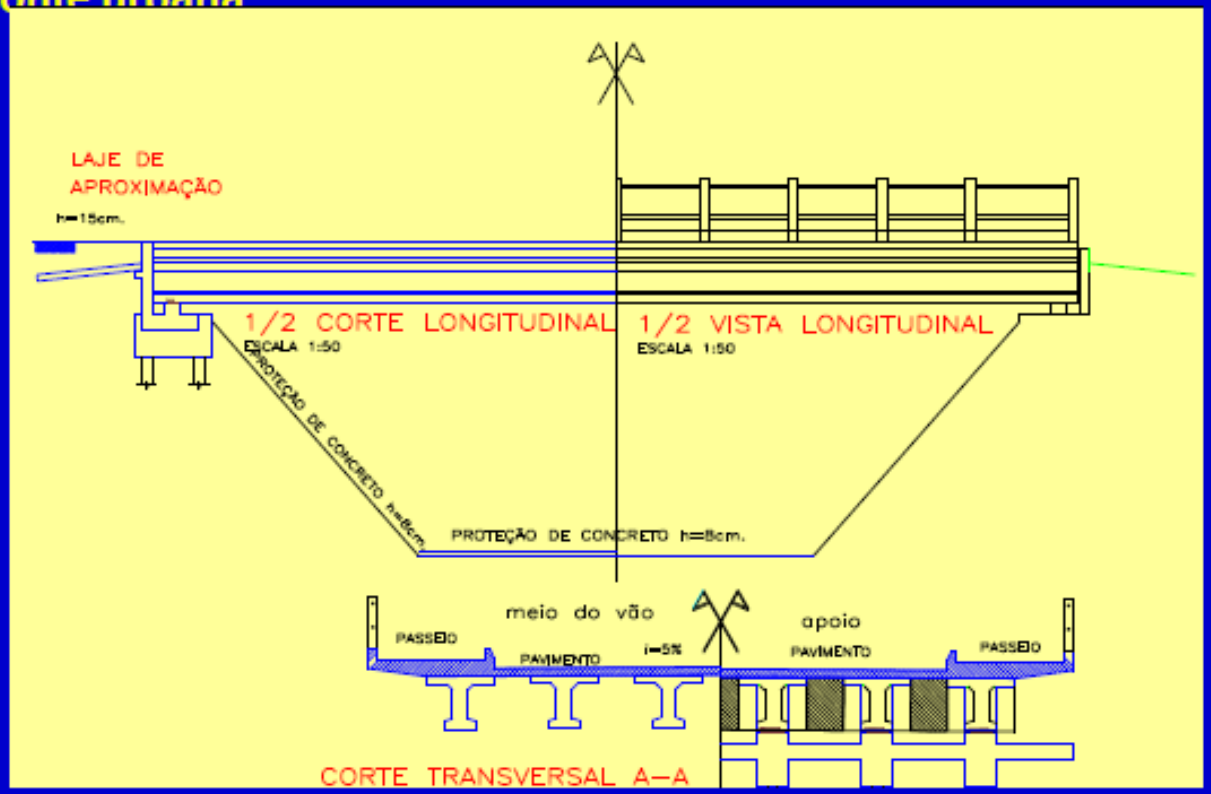
1.3.4 HIDRAULICO

Ponte urbana



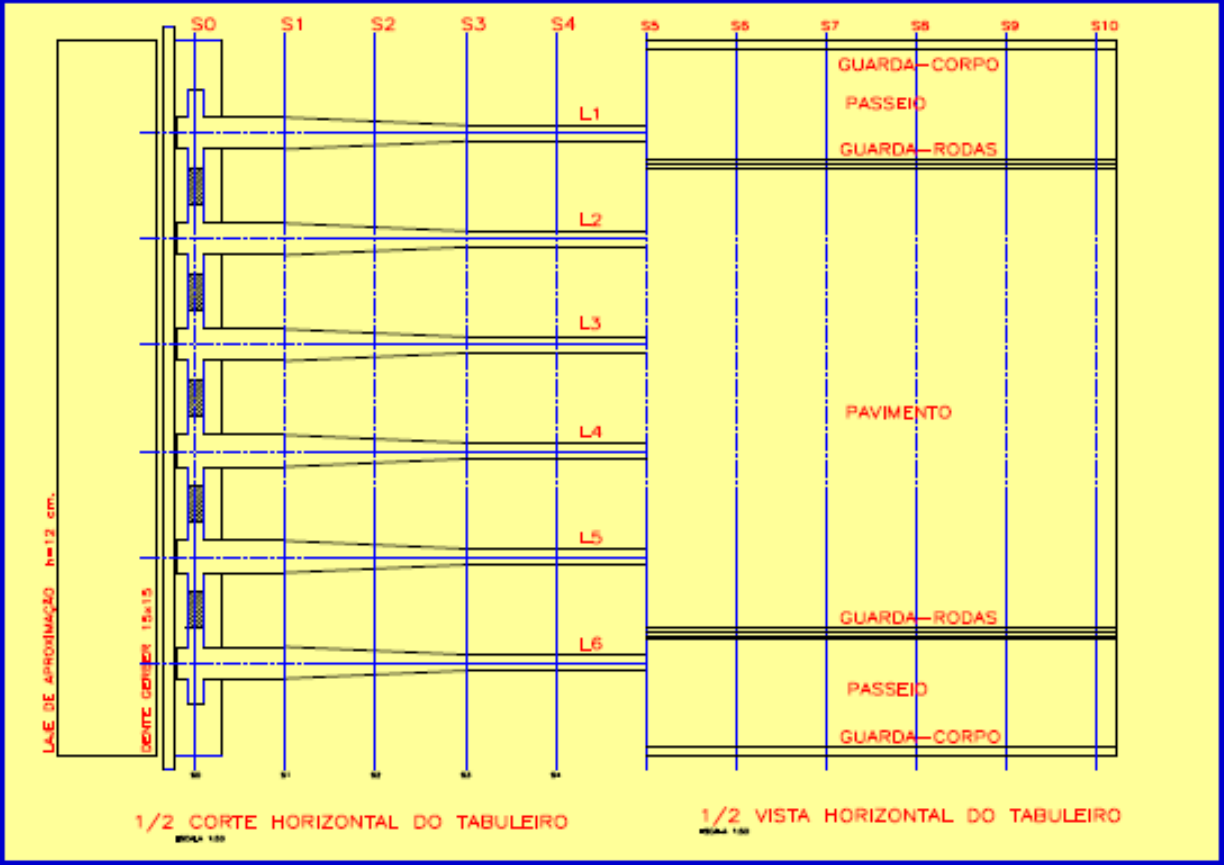
1.3.4 HIDRAULICO

Ponte urbana

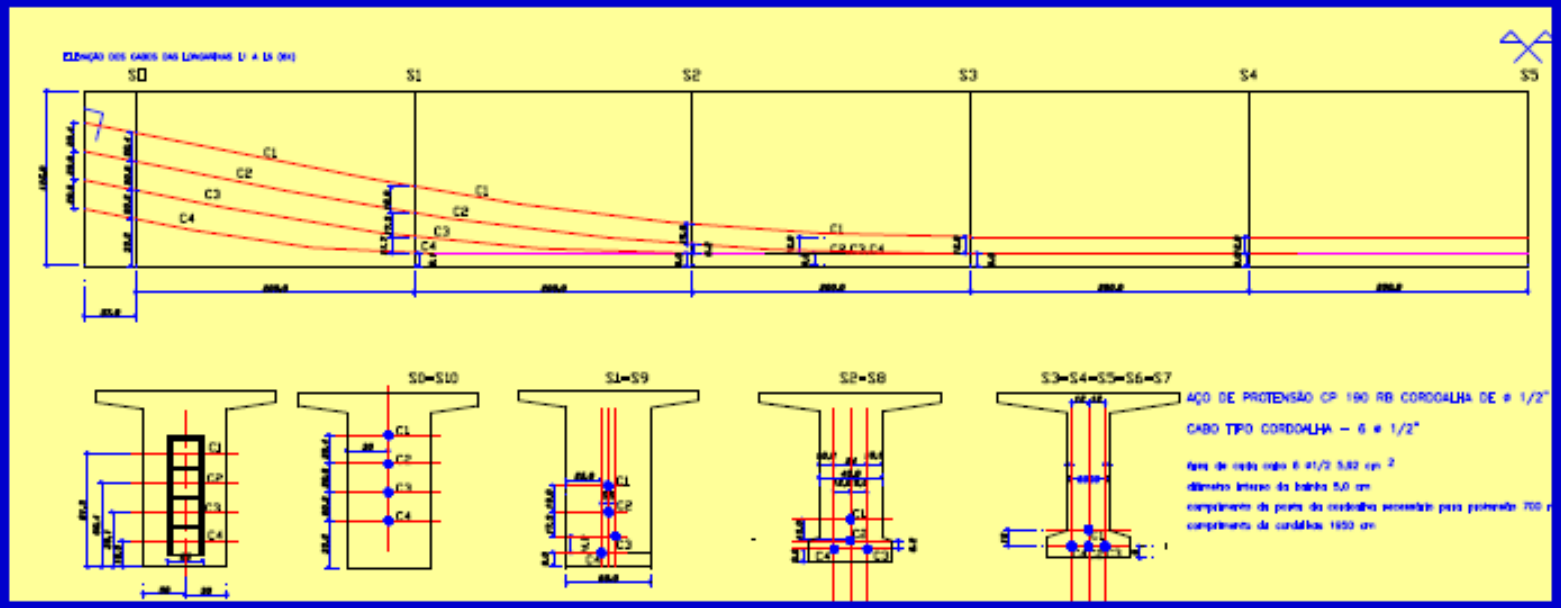


CAT

CONCRETO PROTENDIDO



CONCRETO PROTENDIDO



2. MATERIAIS EMPREGADOS

Madeira

Concreto Armado,

Concreto Protendido,

Aço

Mistas.

Estruturas de pontes

PRINCIPAIS SISTEMAS ESTRUTURAIS DE PONTES EM SEU DESENVOLVIMENTO.

Quadro ou Galeria

Lajes

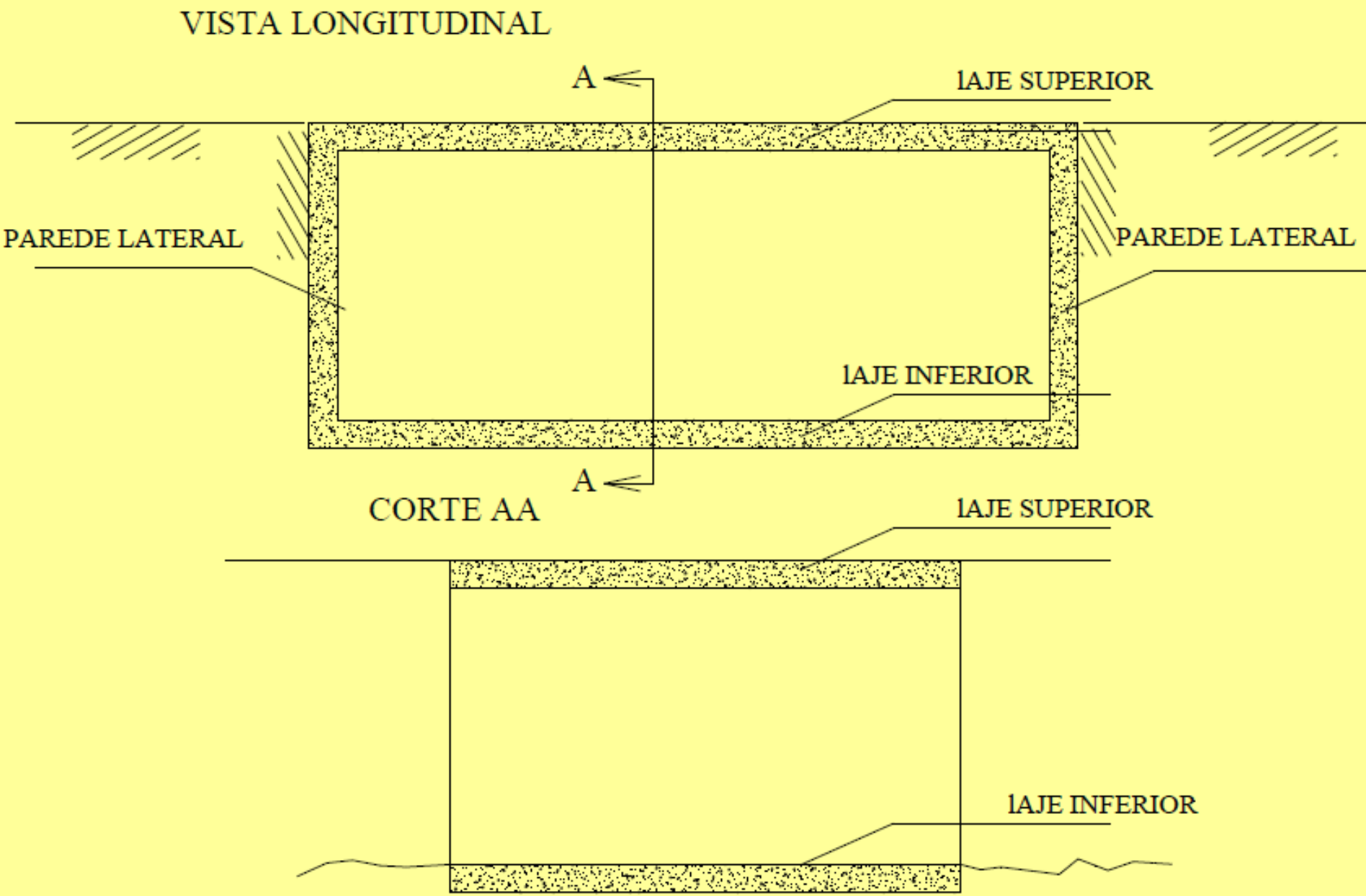
Em vigas

Arcos (normal e invertido)-

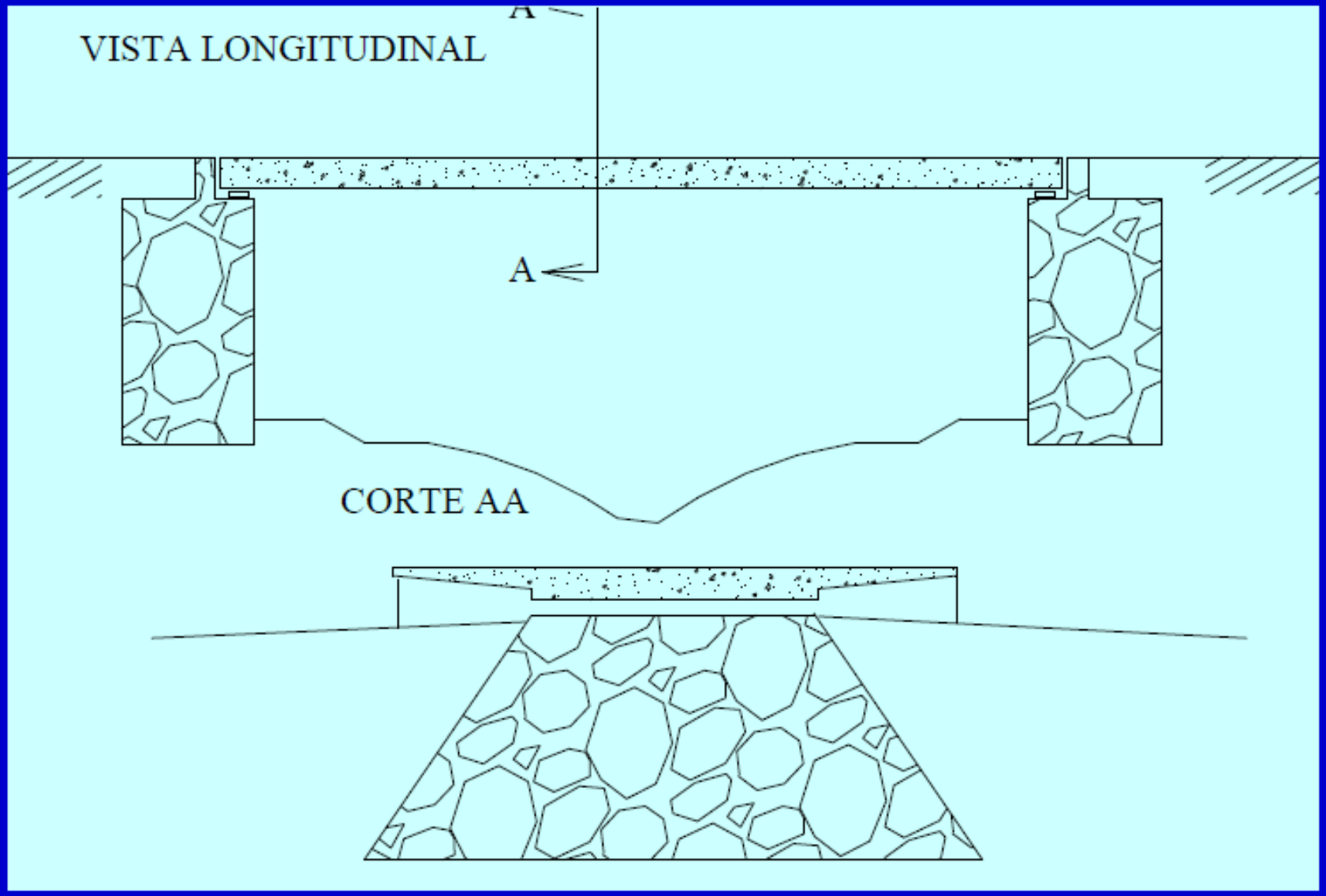
Estaiadas

Pênsil

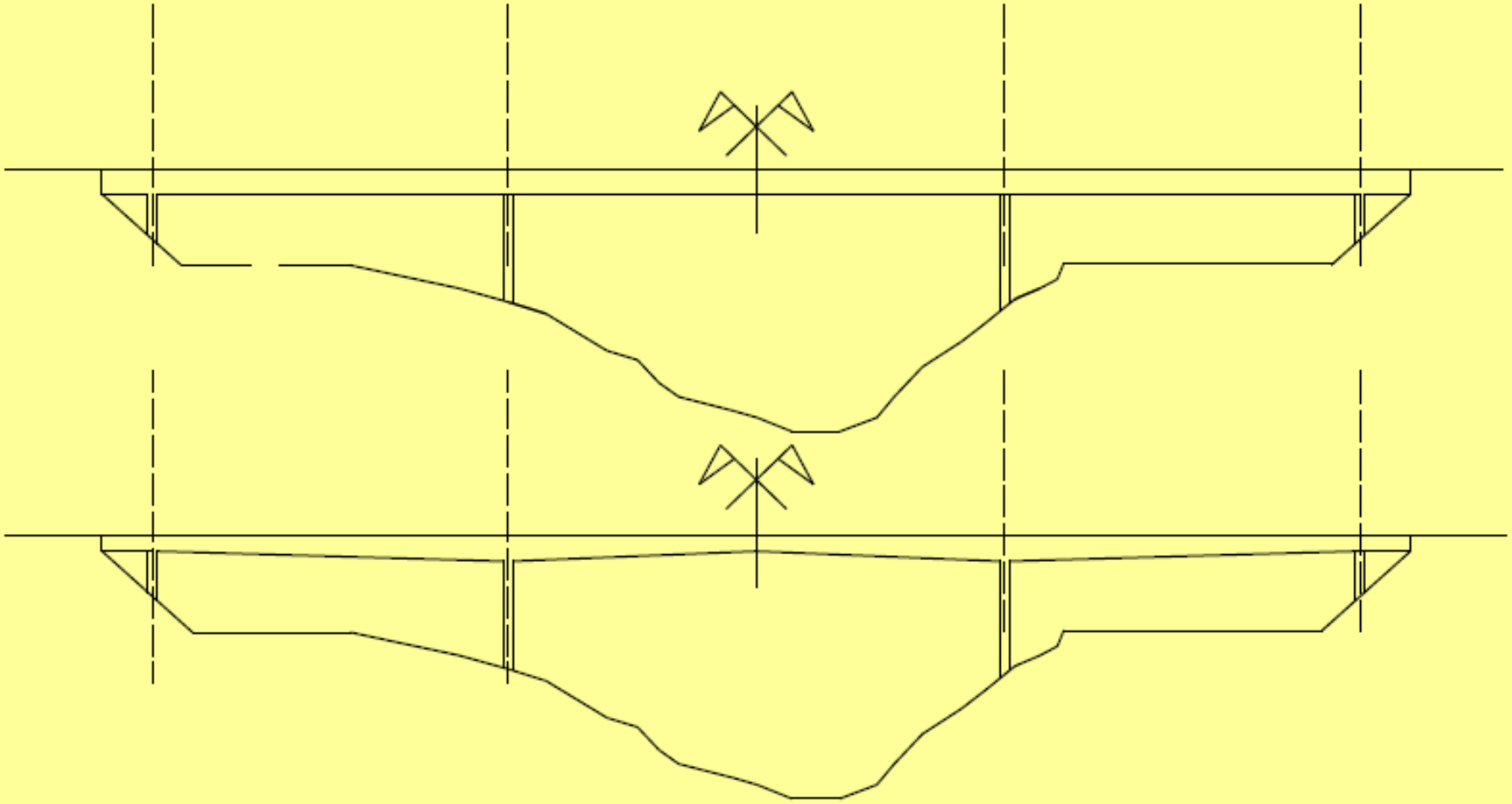
Estruturas de pontes



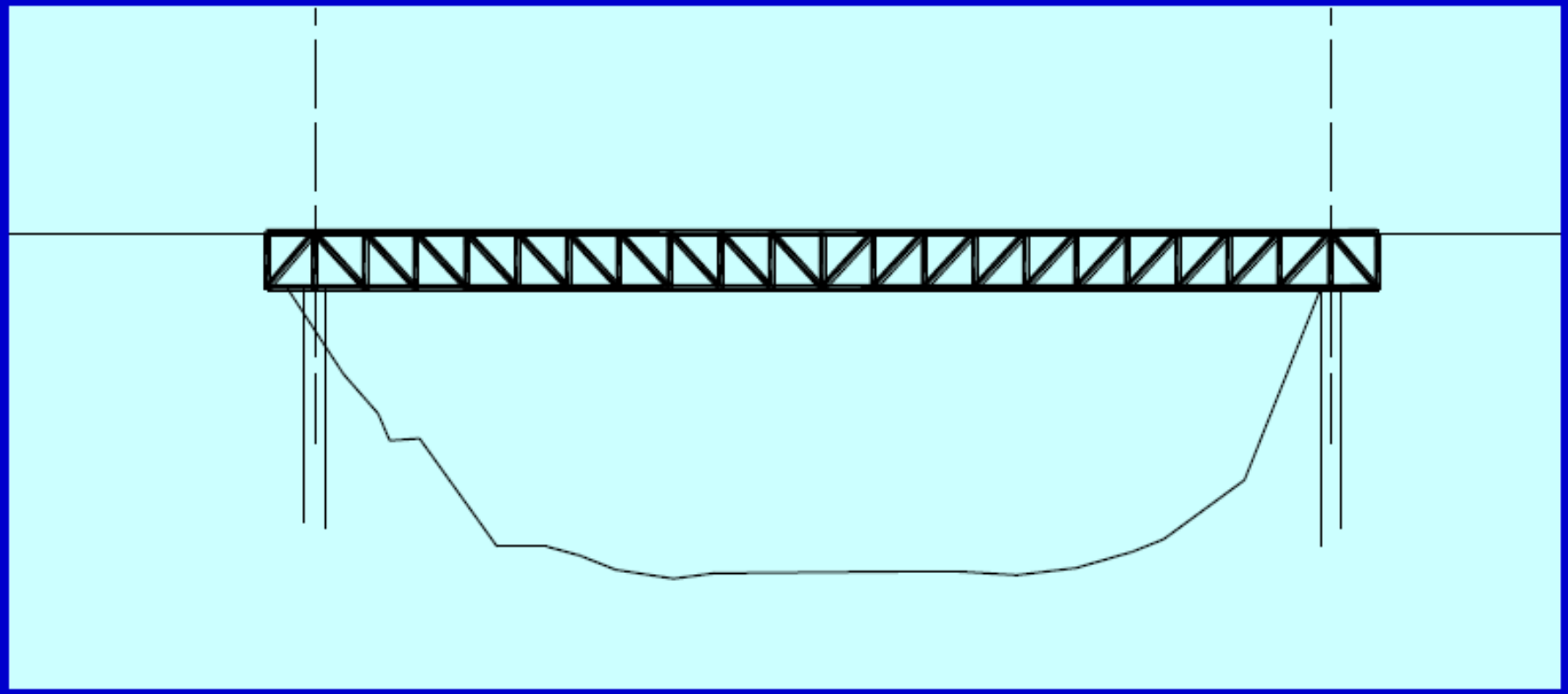
Estruturas de pontes



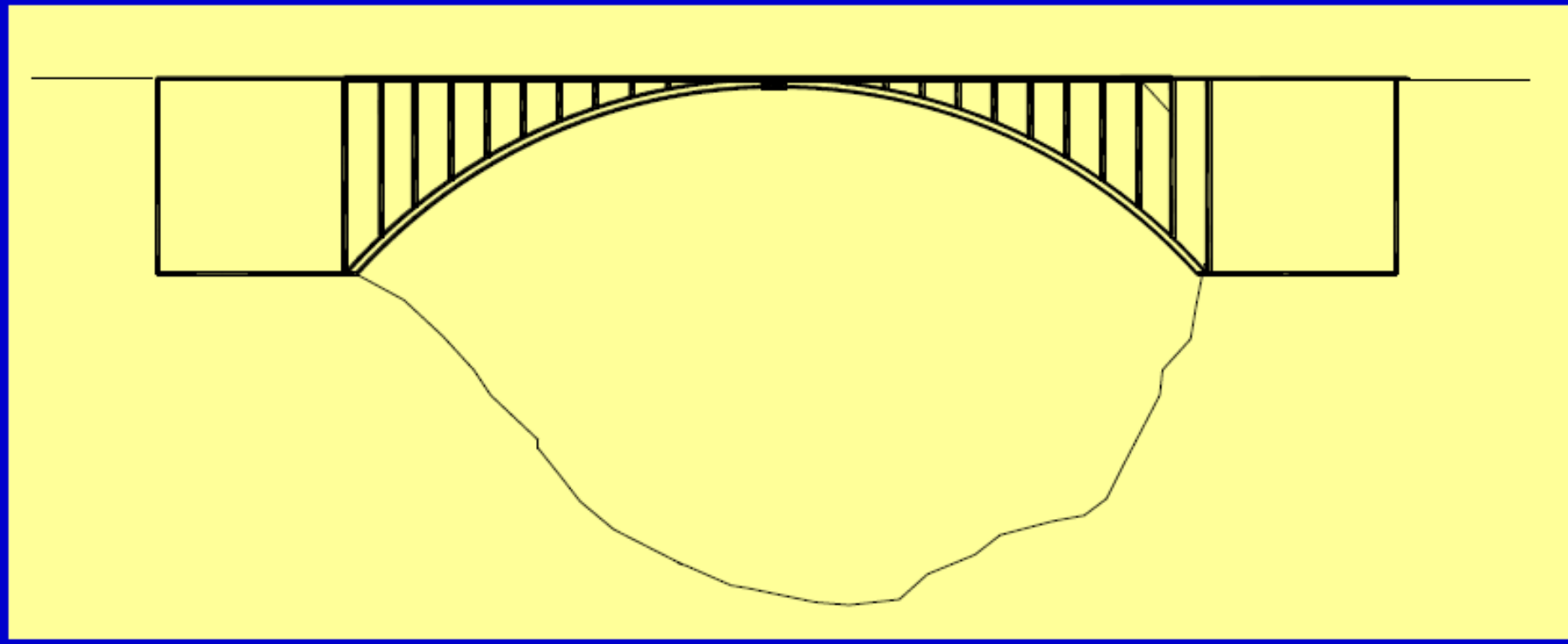
Estruturas de pontes



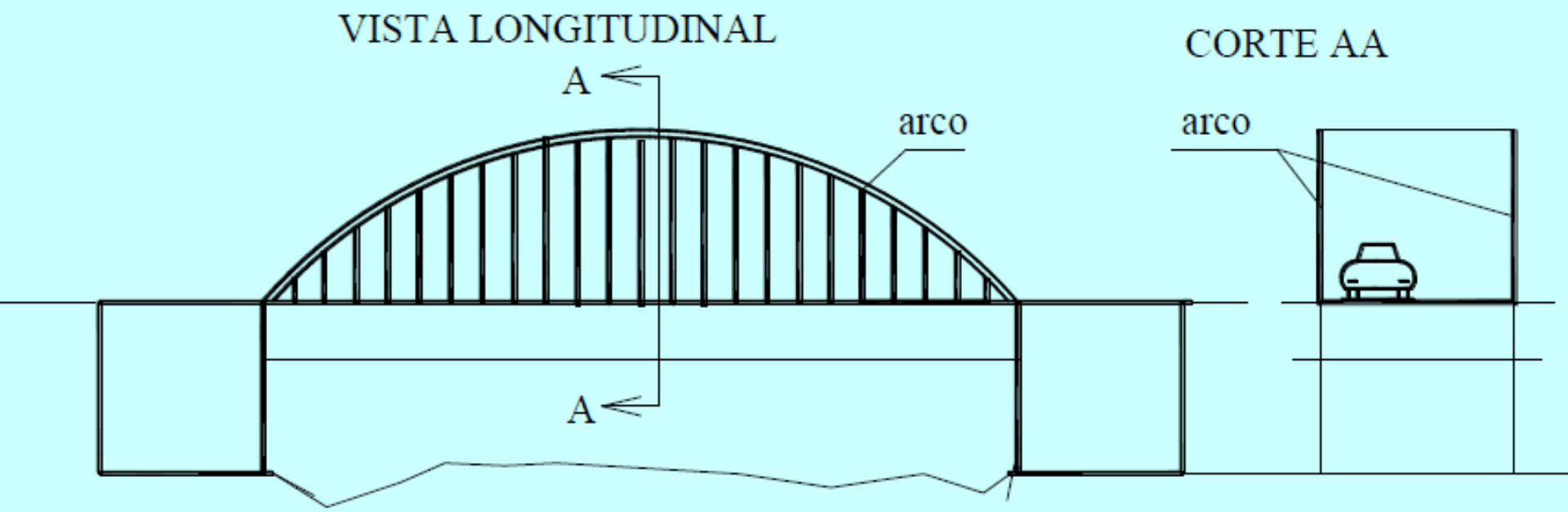
Estruturas de pontes



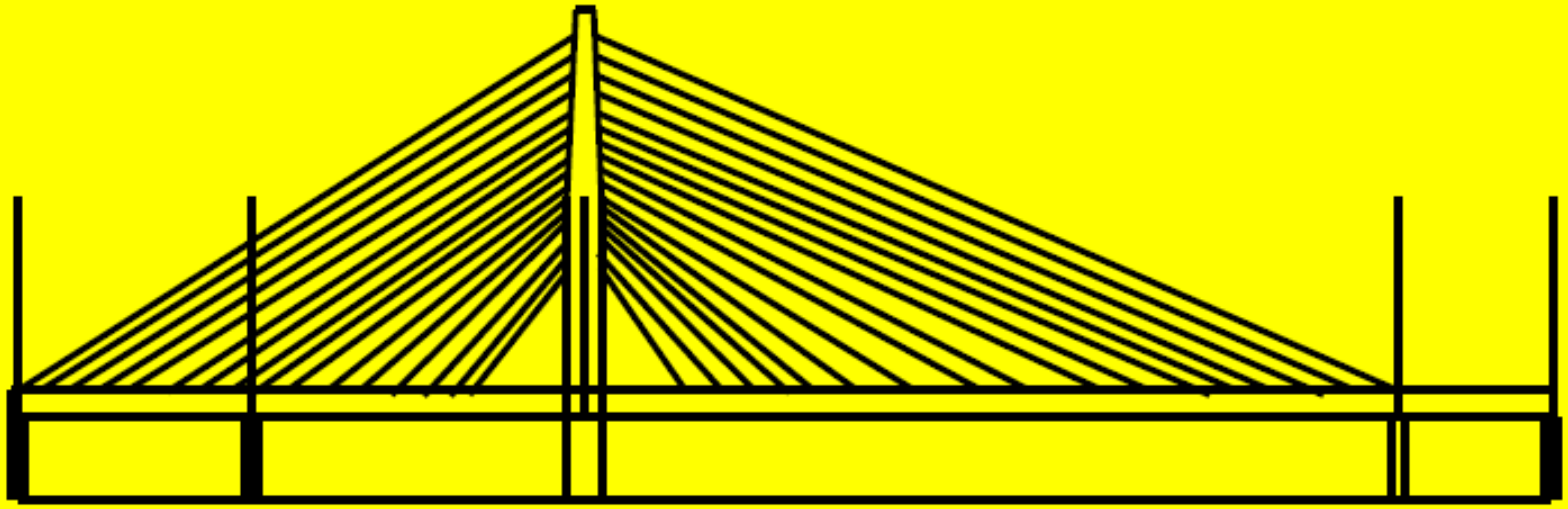
Estruturas de pontes

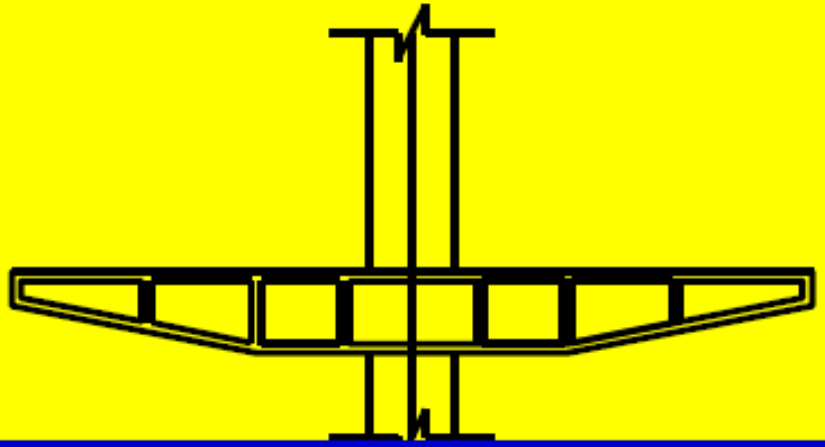


Estruturas de pontes

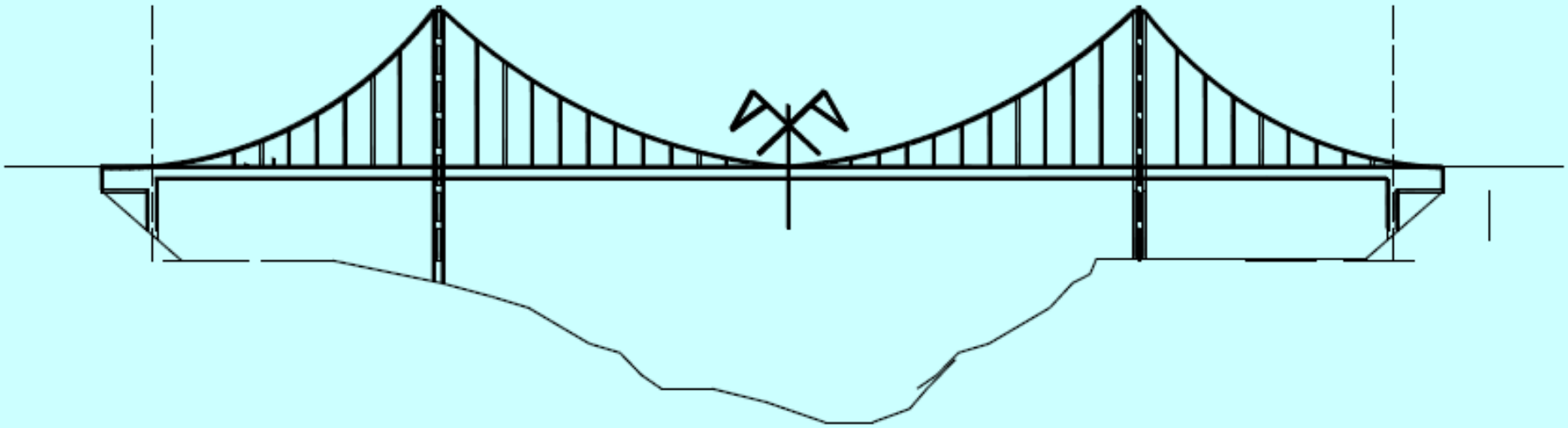


Estruturas de pontes





Estruturas de pontes



CLASSIFICAÇÃO DAS PONTES QUANTO A EXECUÇÃO

Até a década de 90 a maioria das pontes em concreto
eram executadas no local.

A partir da maior industrialização
e a introdução do pedágio controlado
pelas concessionários,

tornou-se mais econômica,
maioria das vezes
executar as obras como pré-moldadas.

Estruturas de pontes

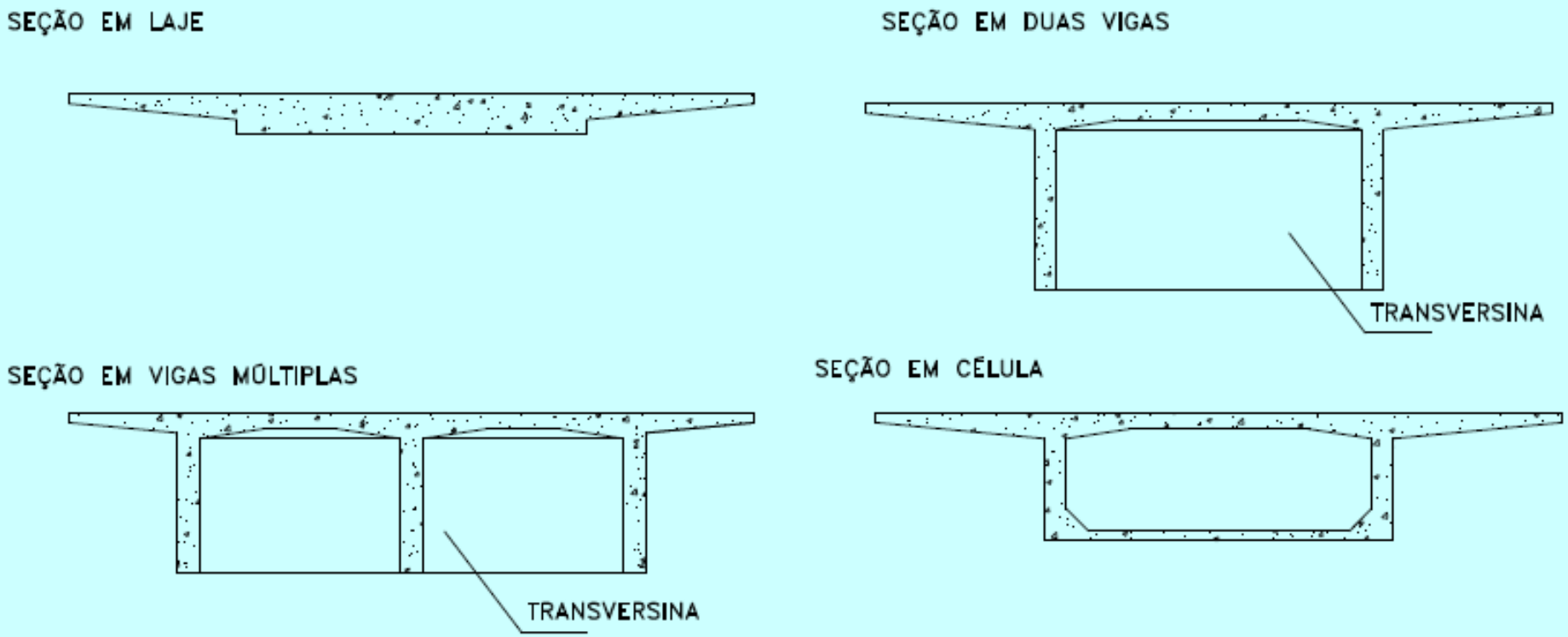
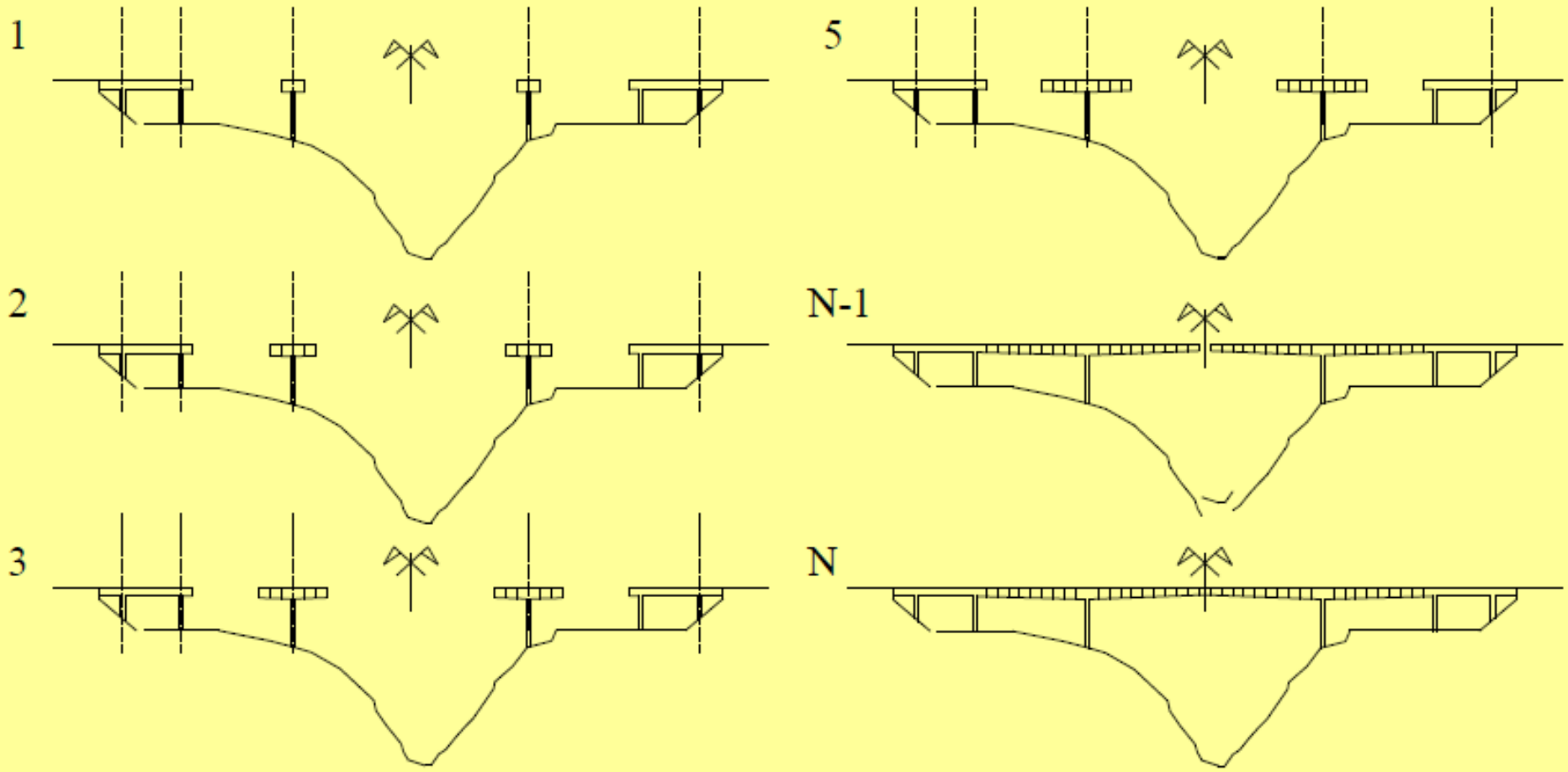
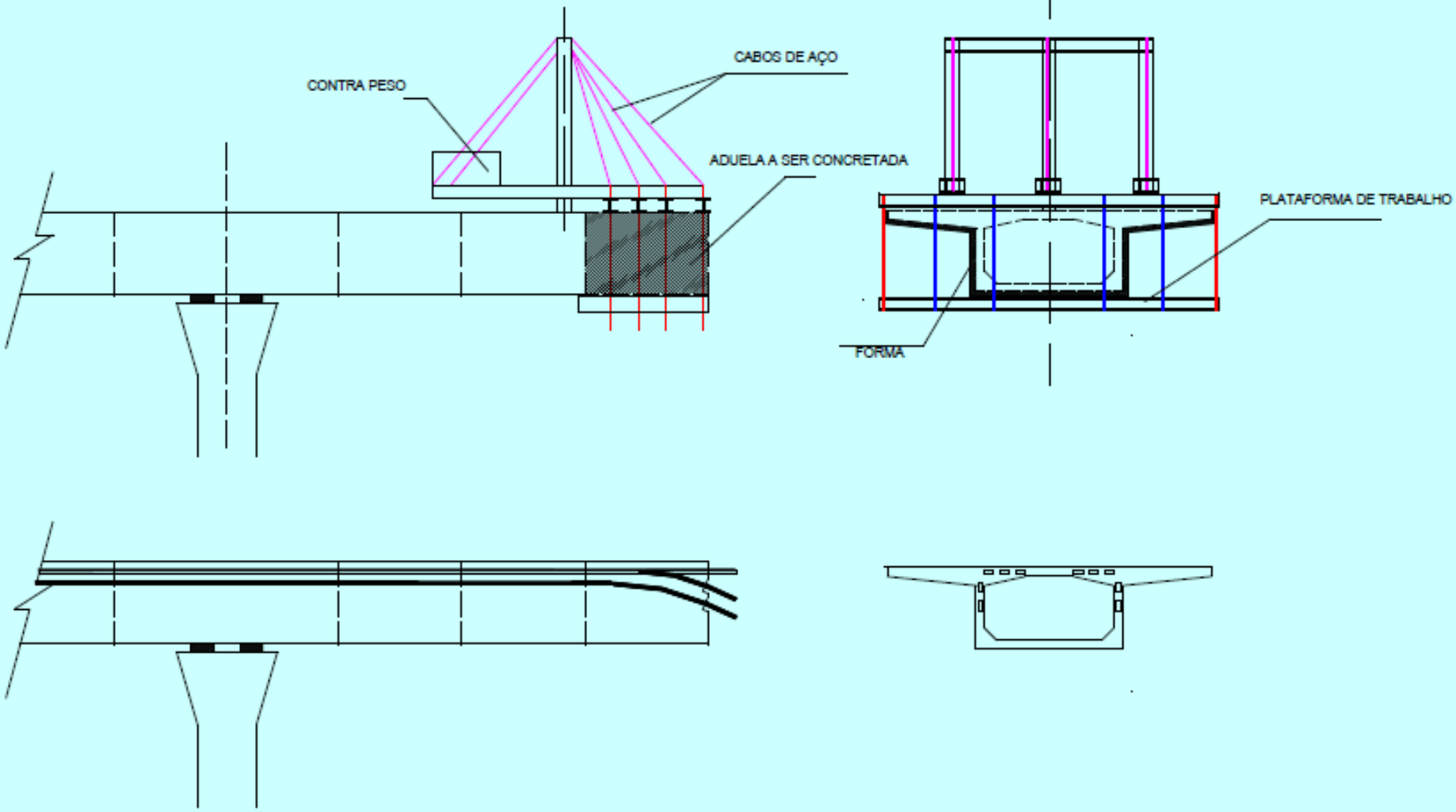


Figura 16-Tipos de seções transversais em pontes de concreto moldadas no local

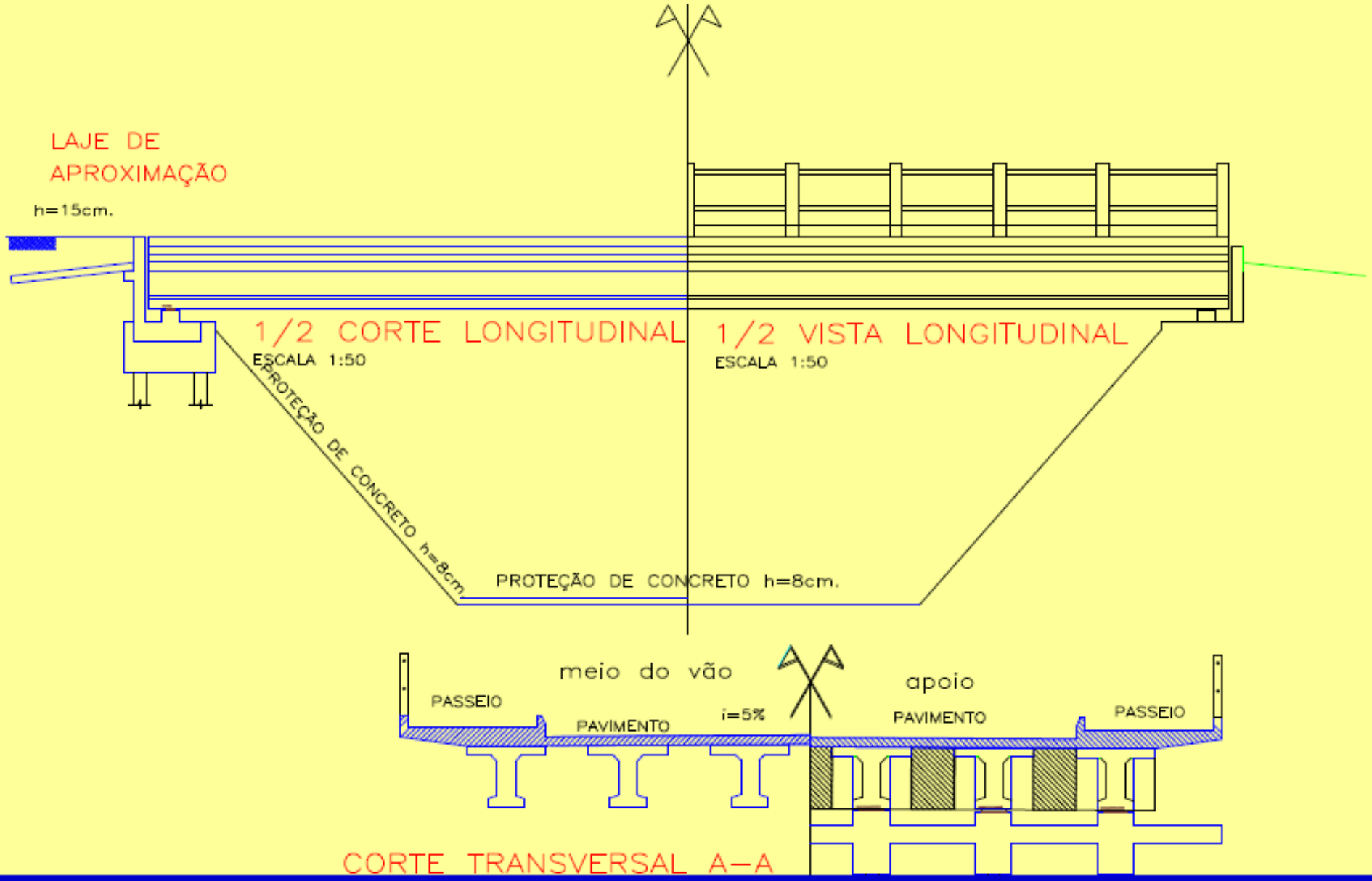
Estruturas de pontes



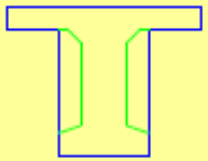
Estruturas de pontes



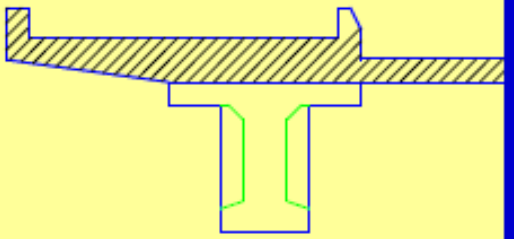
Estruturas de pontes



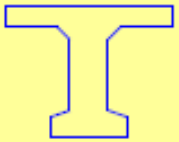
Estruturas de pontes



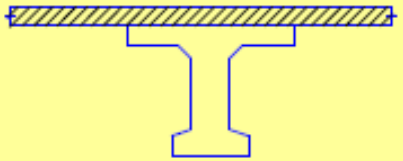
SEÇÃO NO APOIO
PRIMEIRA ETAPA
ESCALA 1:50



SEÇÃO NO APOIO
SEGUNDA ETAPA
ESCALA 1:50



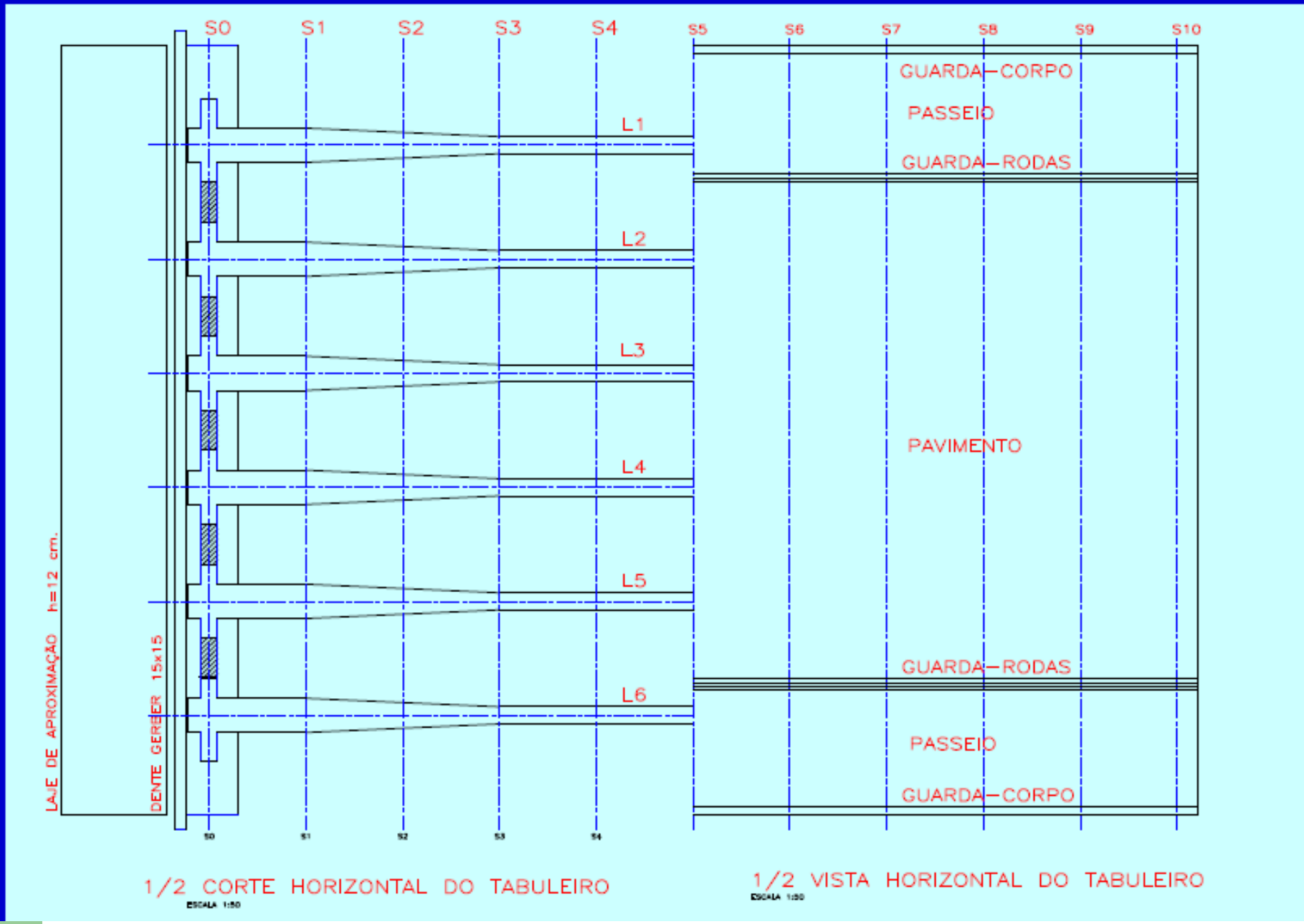
SEÇÃO NO MEIO DO VÃO
PRIMEIRA ETAPA
ESCALA 1:50



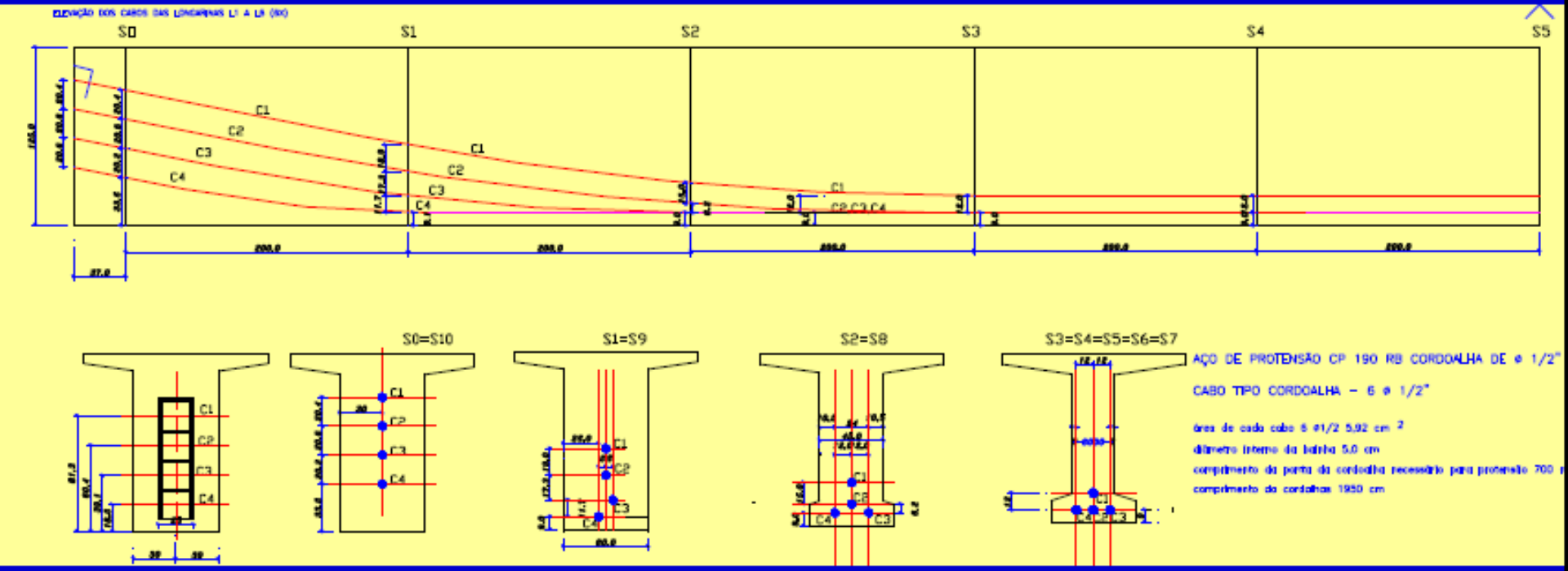
CONRETADA NA
SEGUNDA ETAPA

SEÇÃO NO MEIO DO VÃO
SEGUNDA ETAPA
ESCALA 1:50

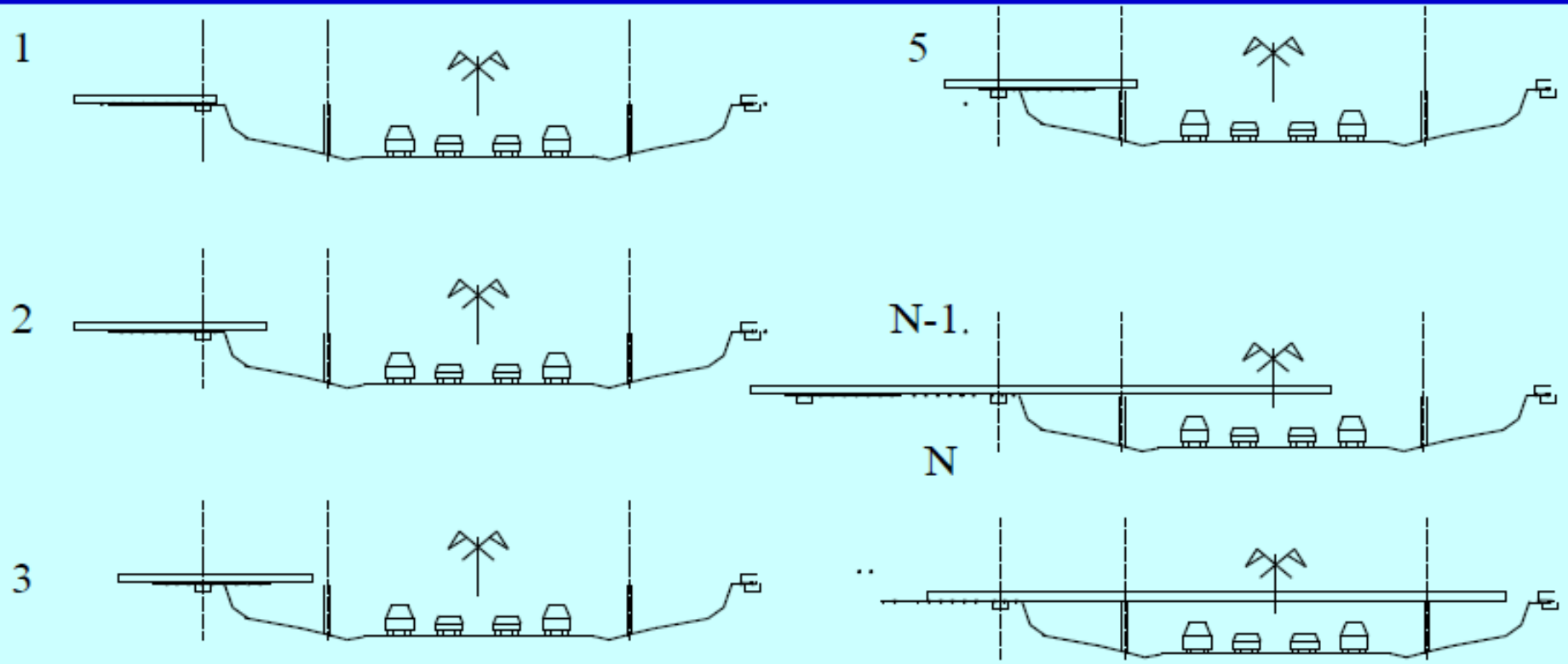
Estruturas de pontes



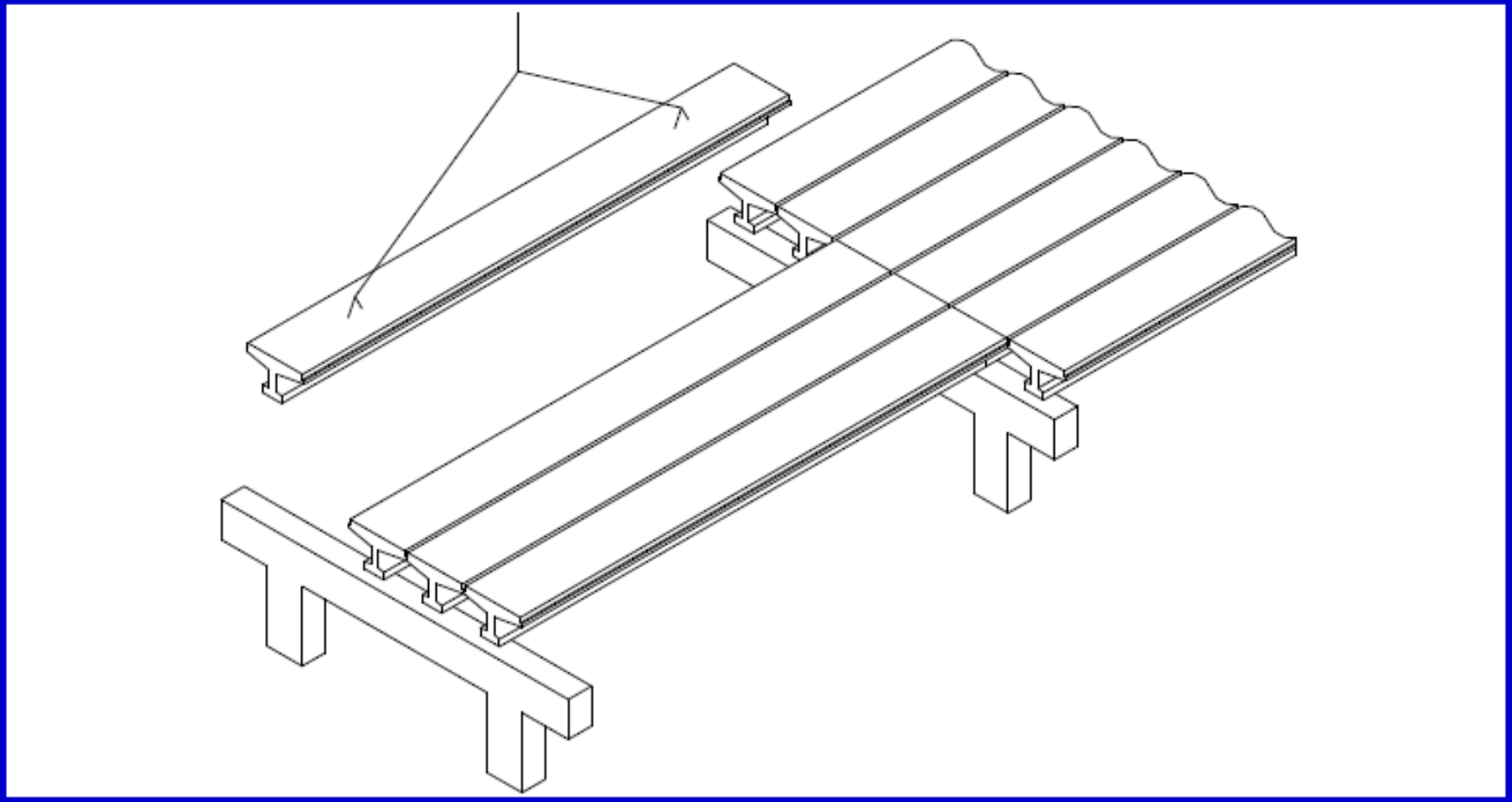
Estruturas de pontes



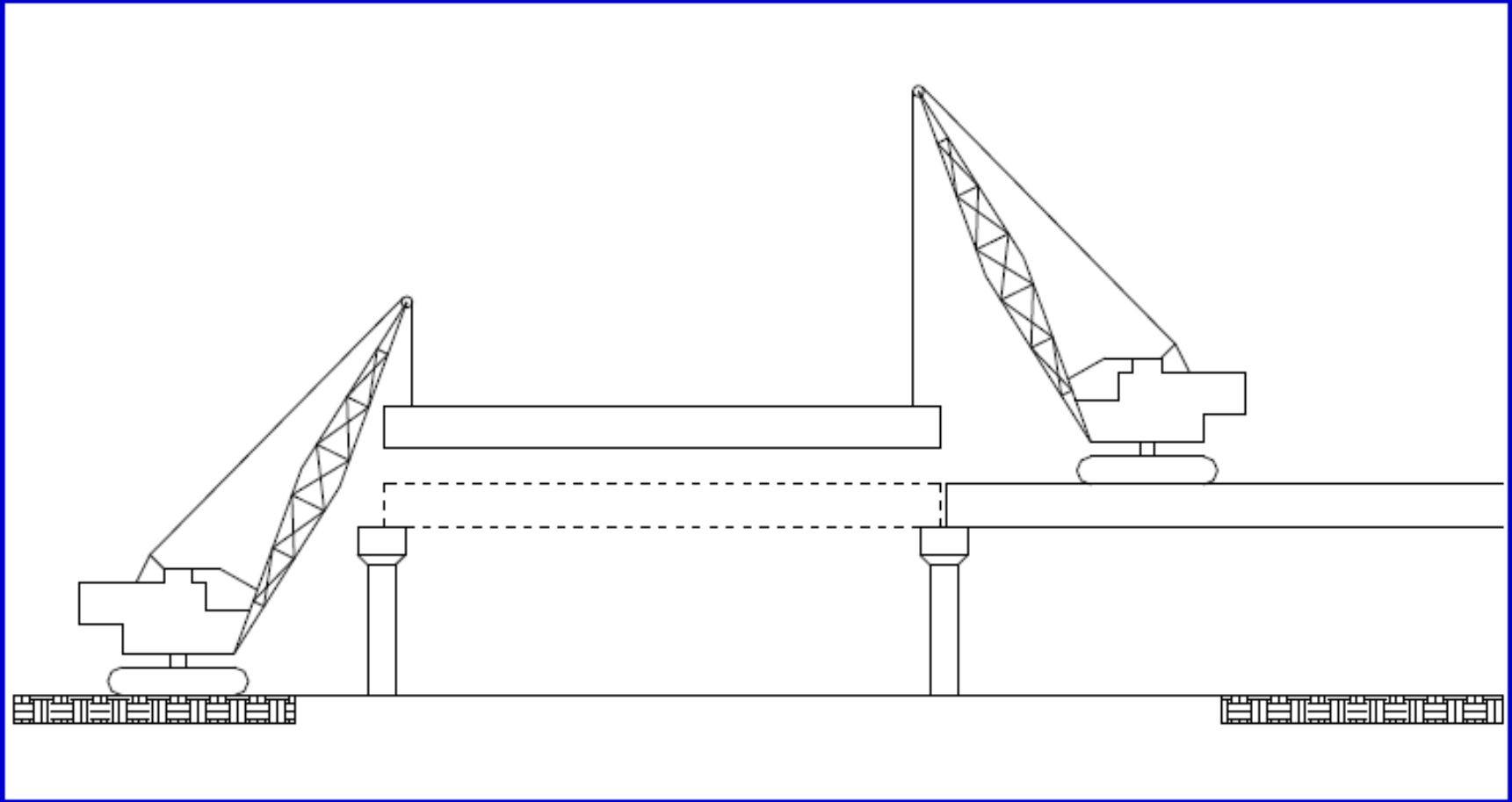
Estruturas de pontes



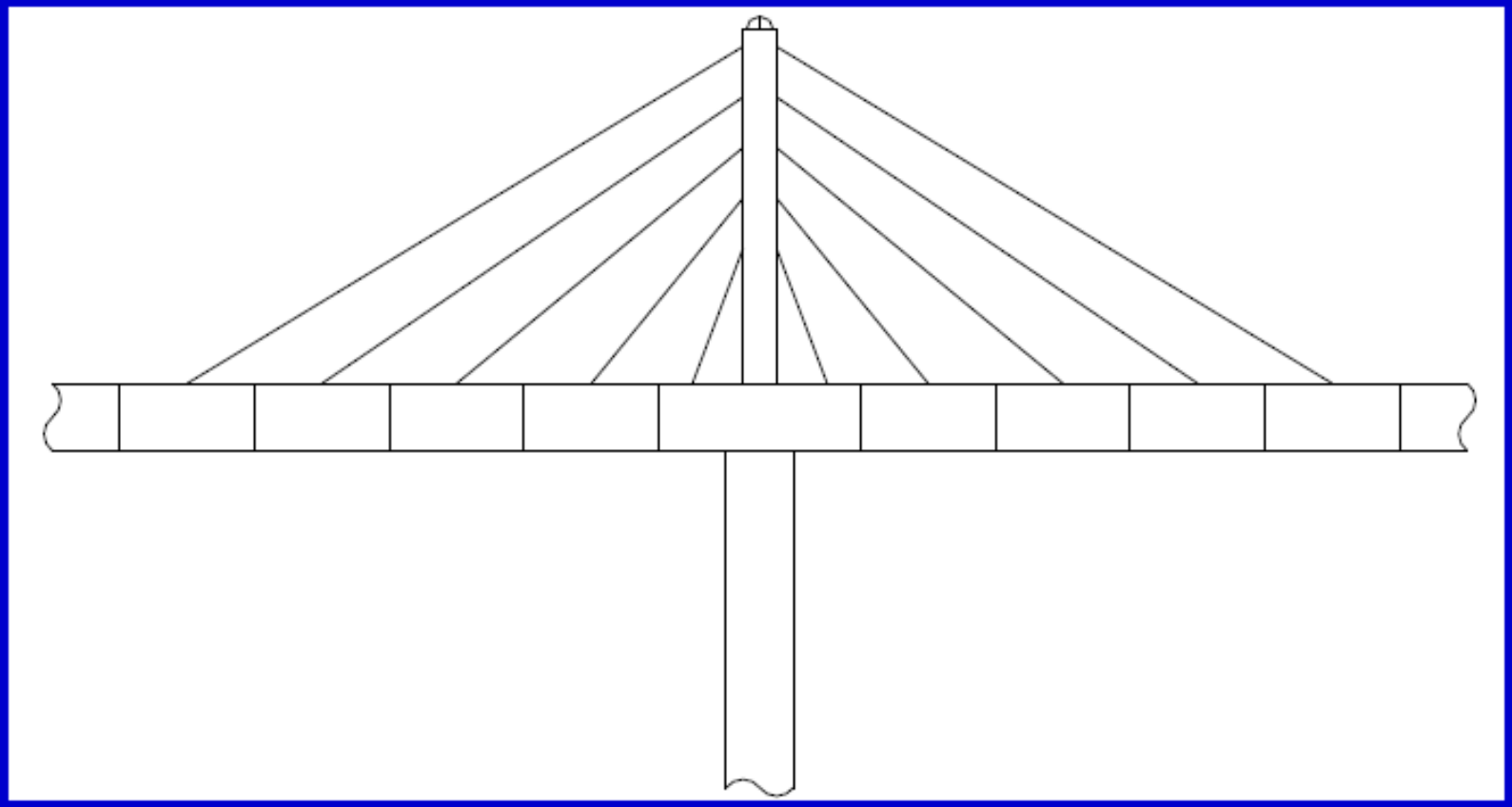
Estruturas de pontes



Estruturas de pontes

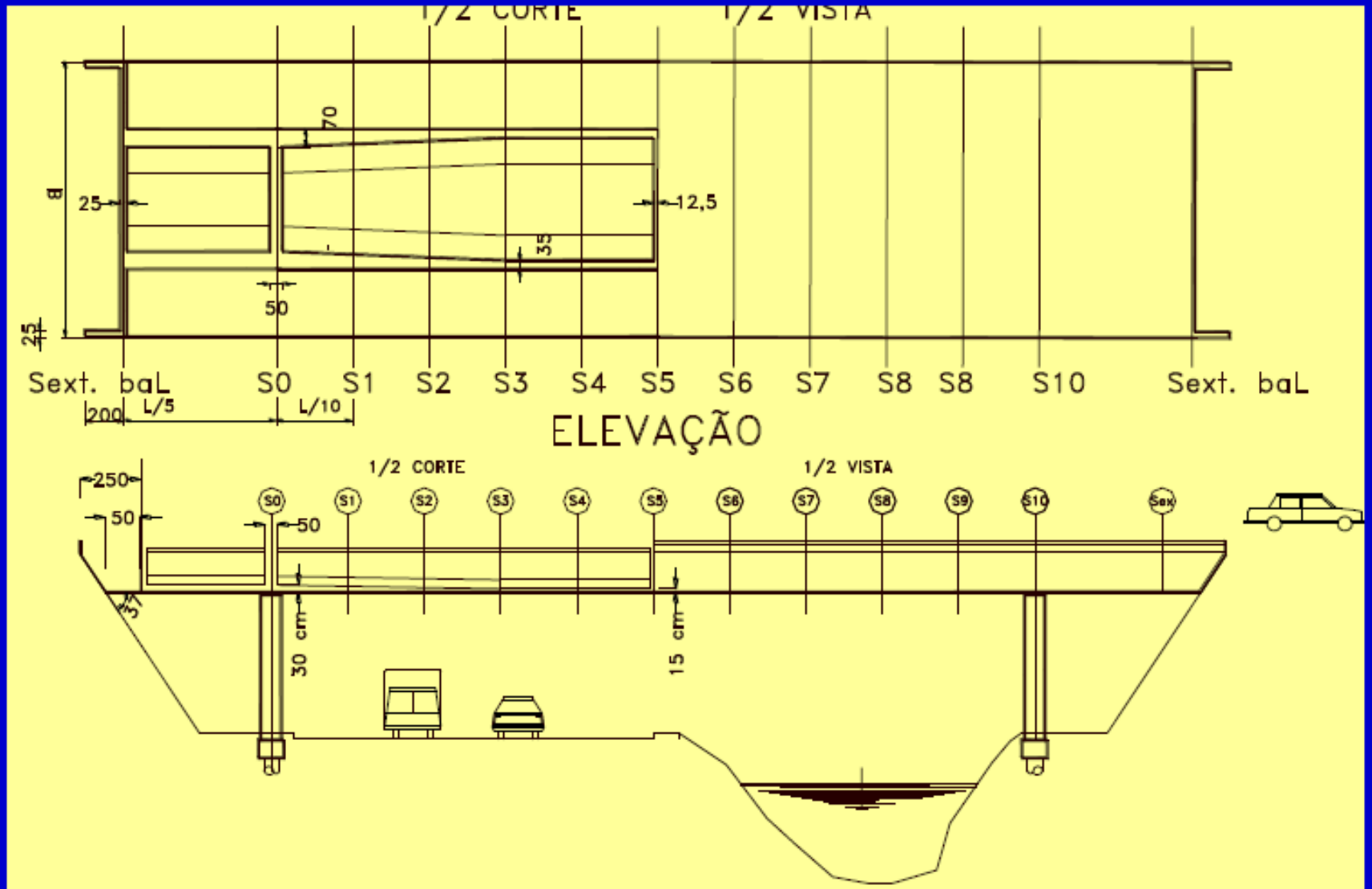


Estruturas de pontes



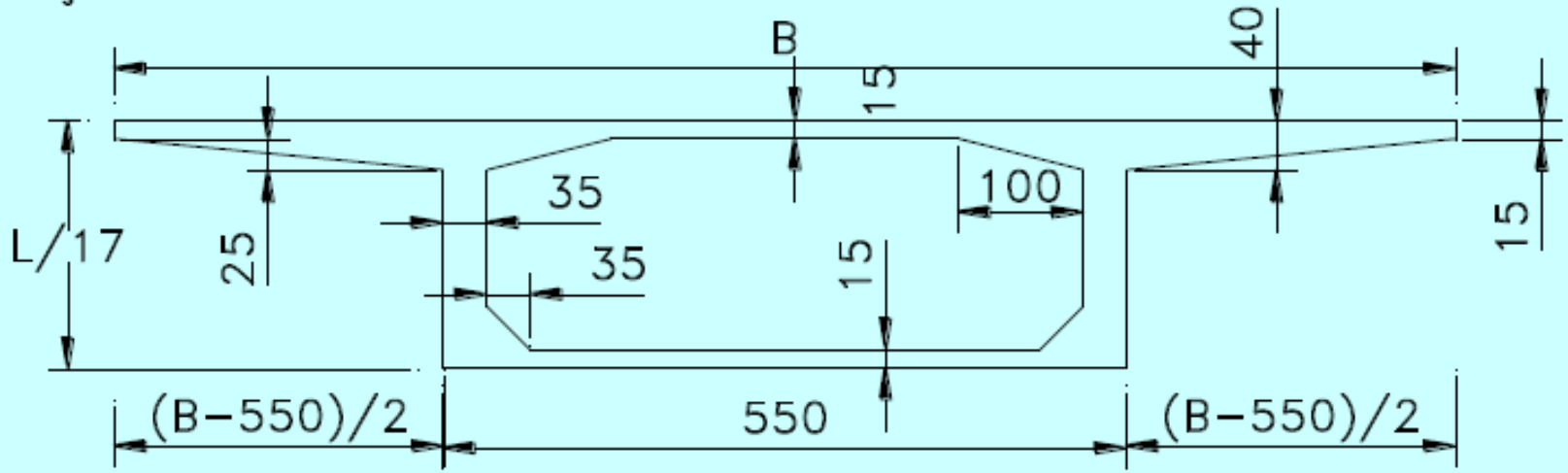
Estruturas de pontes

Detalhamento das moldadas no local
Pontes, Viadutos em vigas Celulares

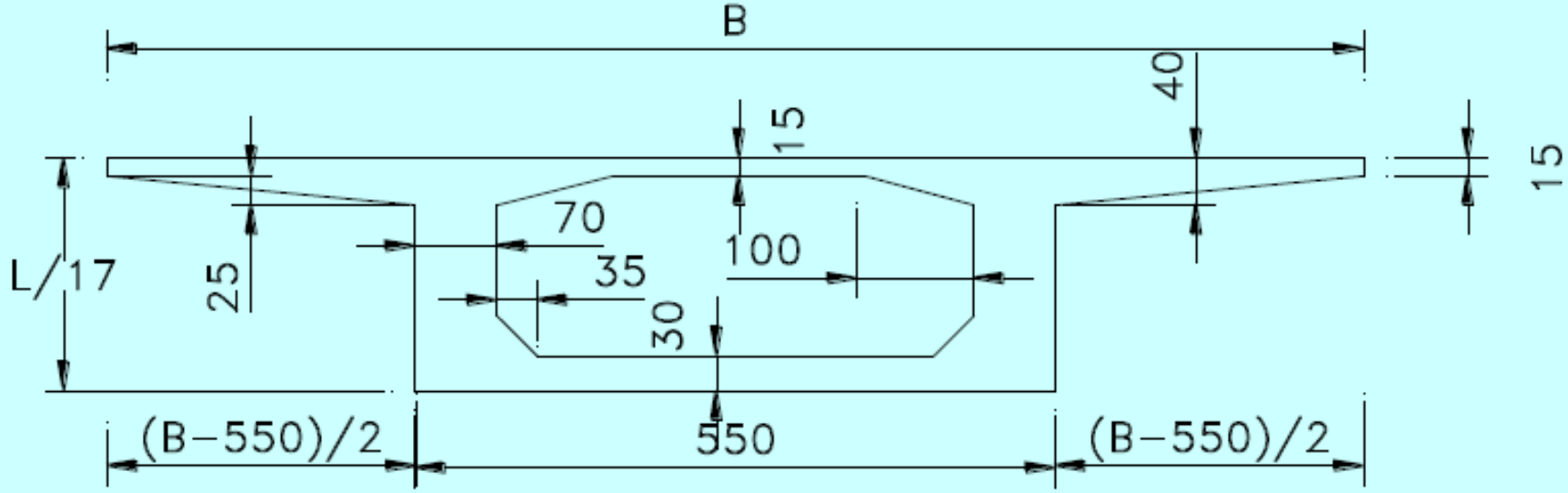


Estruturas de pontes

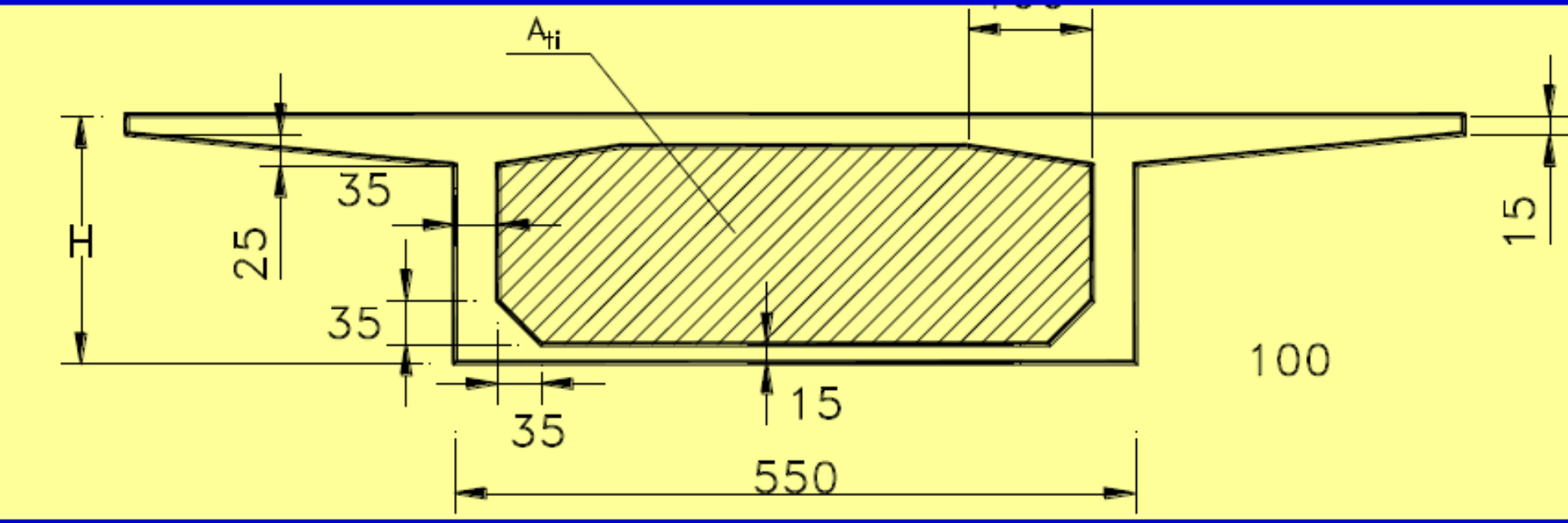
SEÇÃO DO MEIO DO VÃO



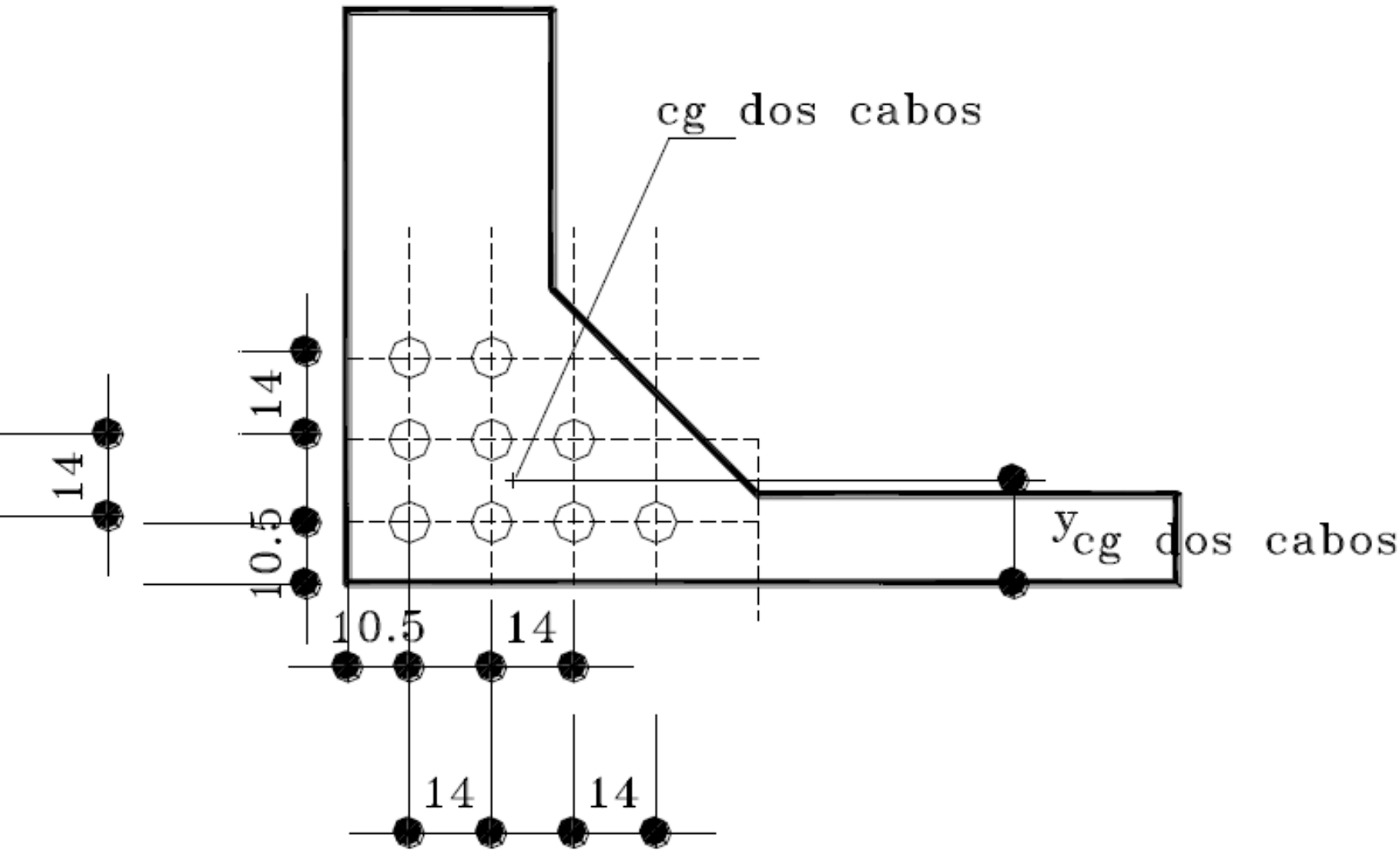
SEÇÃO DO APOIO



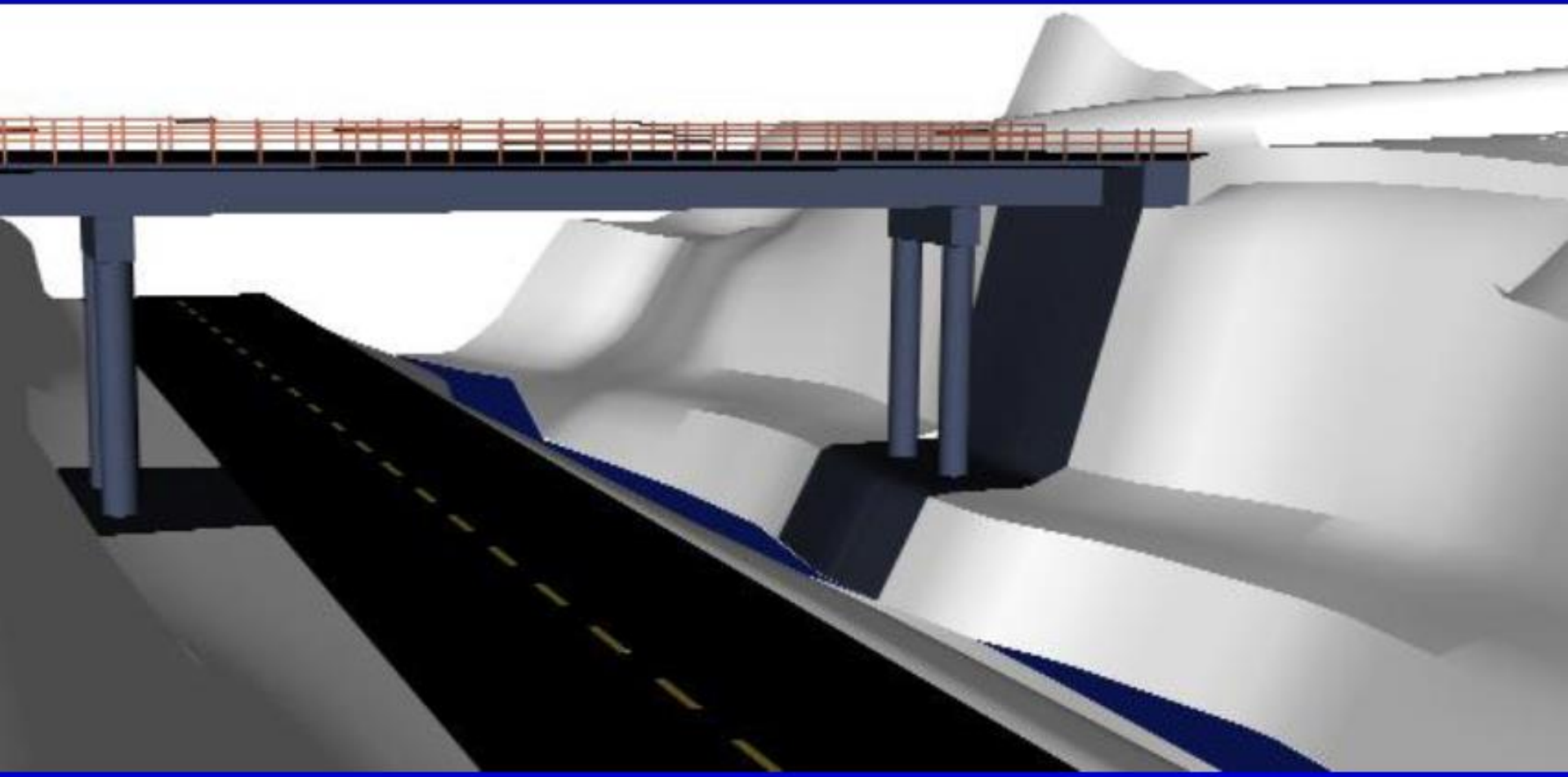
Estruturas de pontes



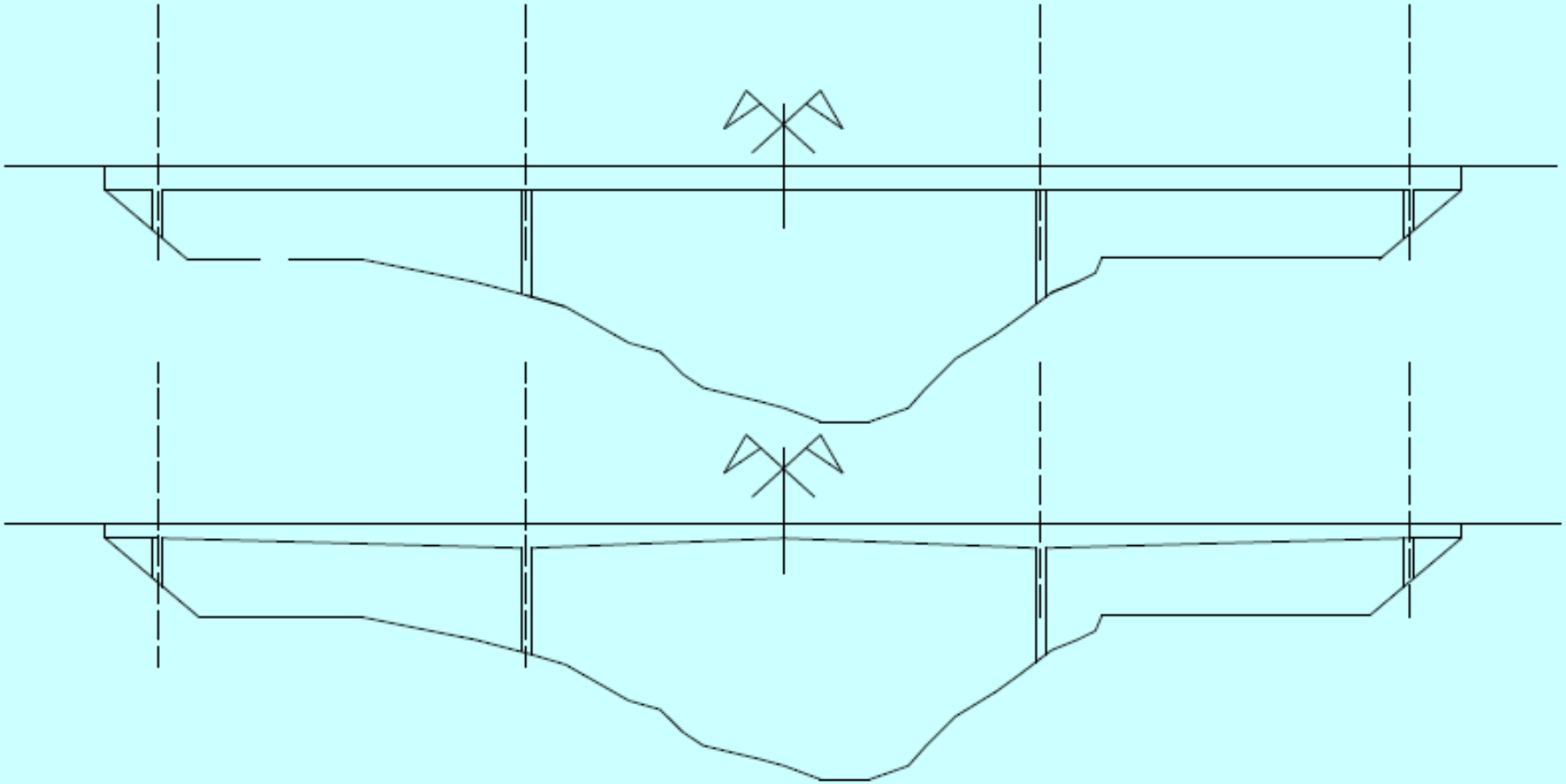
Estruturas de pontes



Estruturas de pontes



Estruturas de pontes



5-AÇÕES A CONSIDERAR EM PONTES DE CONCRETO SEGUNDO A NORMA BRASILEIRA

A NBR 7187:2003 define as ações a serem consideradas em pontes de concreto armado e protendido.

As ações permanentes são consideradas como constantes ao longo da vida útil da obra de arte ou que crescem no tempo tendendo a um valor constante.

ao contrário das anteriores tem-se as variáveis.

Estruturas de pontes

As cargas permanentes são divididas:

em peso próprio,

pavimentação,

trilhos, dormentes, lastro ferroviário,

revestimentos,

guarda-corpos,

empuxos de terra e líquidos,

forças de protensão,

deformações impostas

(provocadas por fluência, retração,
variações de temperatura
deslocamentos de apoios).

Estruturas de pontes

As ações variáveis subdividem-se

cargas verticais,

efeito dinâmico das cargas móveis,

força centrífuga,

choque lateral,

efeitos da frenagem e aceleração,

cargas de construção,

cargas de vento,

empuxo de terra provocado por cargas móveis,

pressão da água em movimento,

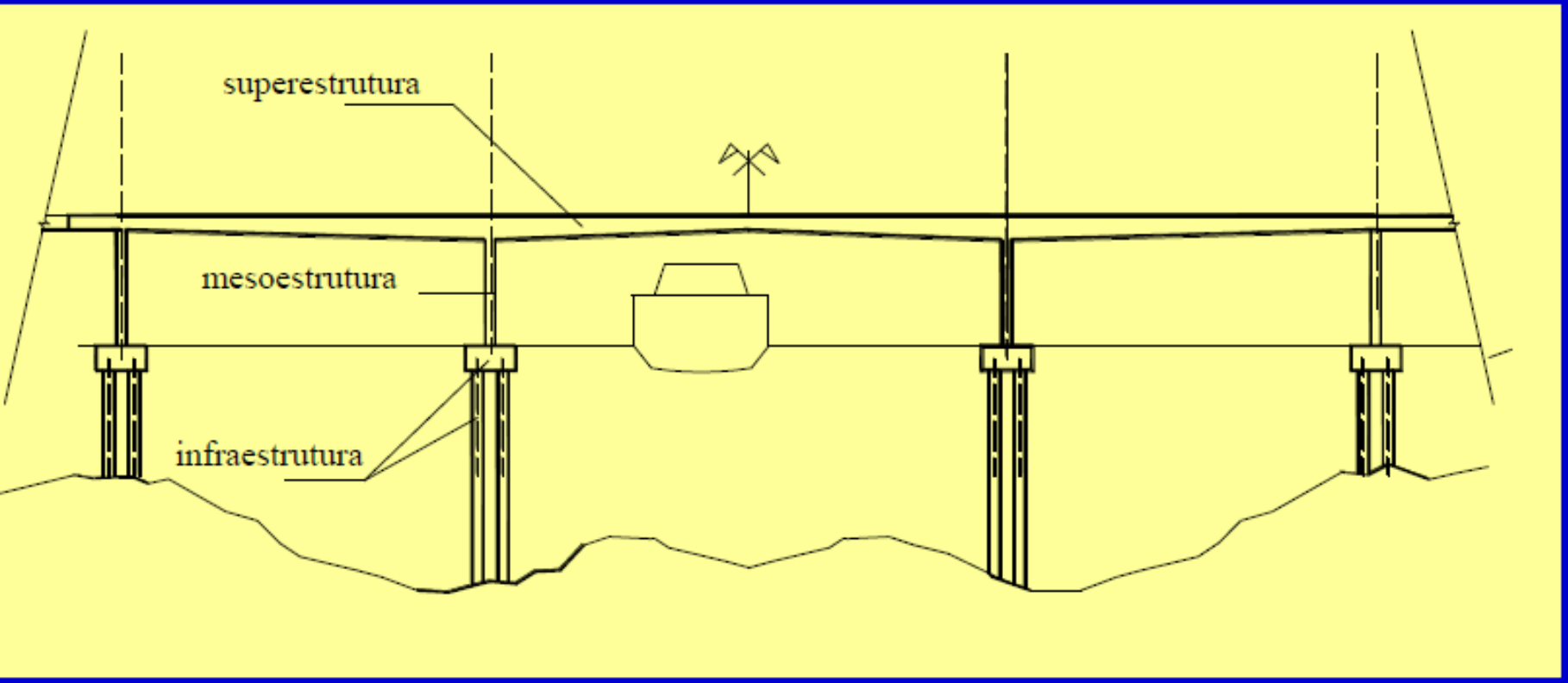
efeito dinâmico do movimento das águas

temperatura,

choques de objetos móveis

ações excepcionais

Estruturas de pontes



Estruturas de pontes

AÇÕES VERTICAIS MÓVEIS EM PONTES DE CONCRETO SEGUNDO AS NORMAS

Tabela 1. Cargas dos veículos: Fonte: NBR 7188 (1984)

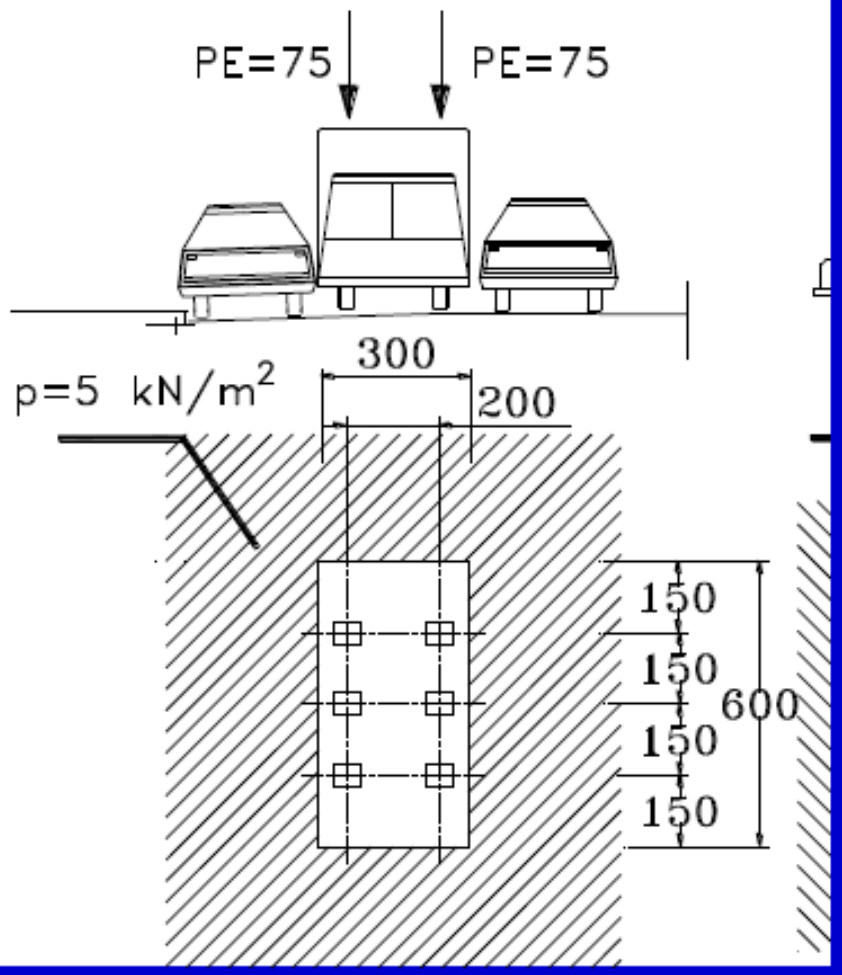
Classe das pontes	Veículo			Carga uniformemente distribuída				
	Tipo	Peso Total		q		q'		Disposição da carga
		KN	t_f	KN/m^2	Kgf/m^2	KN/m^2	Kgf/m^2	
45	45	450	45	5	500	3	300	Carga q em toda a pista. Carga q' nos passeios.
30	30	300	30	5	500	3	300	
12	12	120	12	4	400	3	300	

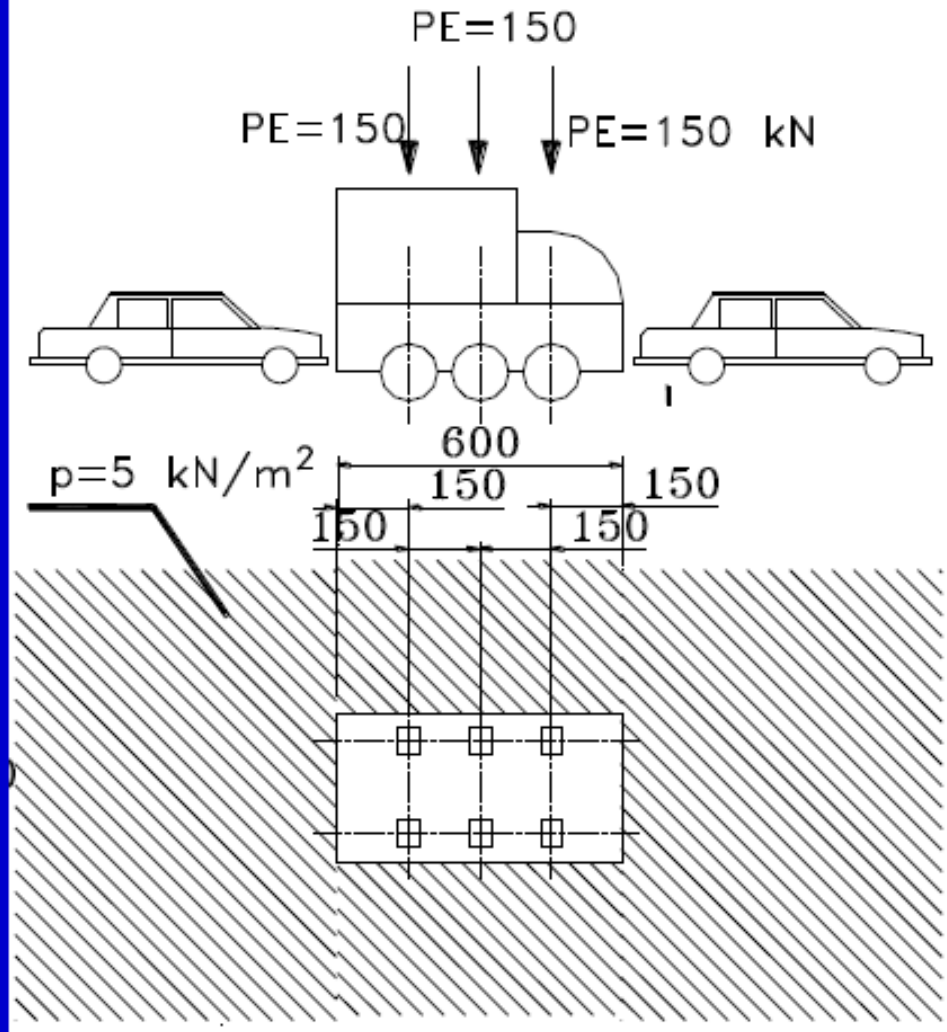
Tabela 2. Características dos veículos: Fonte: NBR 7188 (1984)

	Unidade	Tipo 45	Tipo 30	Tipo 12
Quantidade de eixos	Eixo	3	3	2
Peso total do veículo	KN-tf	450-45	300-30	120-12
Peso de cada roda dianteira	KN-tf	75-7,5	50-5	20-2
Peso de cada roda traseira	KN-tf	75-7,5	50-5	40-4
Peso de cada roda intermediária	KN-tf	75-7,5	50-5	—
Largura de contato b_1 de cada roda dianteira	m	0,50	0,40	0,20
Largura de contato b_3 de cada roda traseira	m	0,50	0,40	0,30
Largura de contato b_2 de cada roda intermediária	m	0,50	0,40	—
Comprimento de contato de cada roda	m	0,20	0,20	0,20
Área de contato de cada roda	m^2	0,20*b	0,20*b	0,20*b
Distância entre os eixos	m	1,50	1,50	3,00
Distância entre os eixos de roda de cada eixo	m	2,00	2,00	2,00

Estruturas de pontes

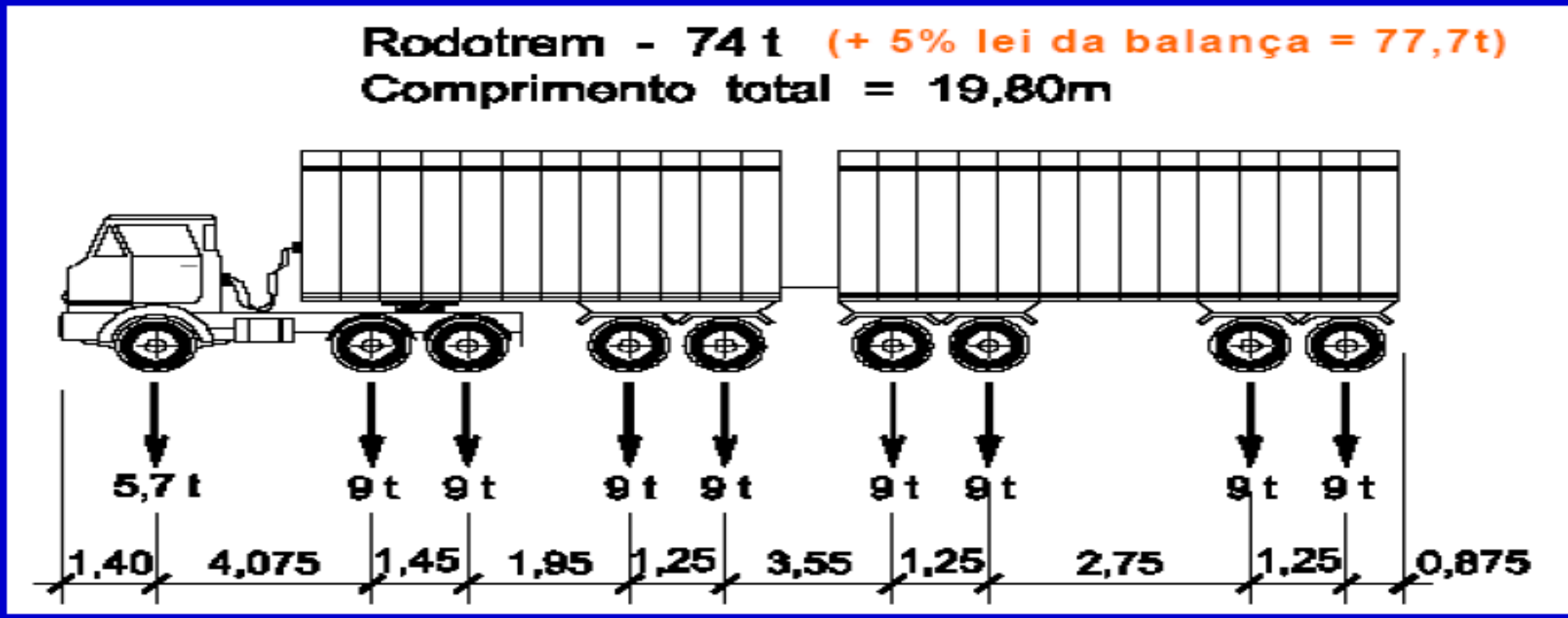
TREM TIPO





Estruturas de pontes

5.2.2. VEÍCULOS USUAIS



Estruturas de pontes

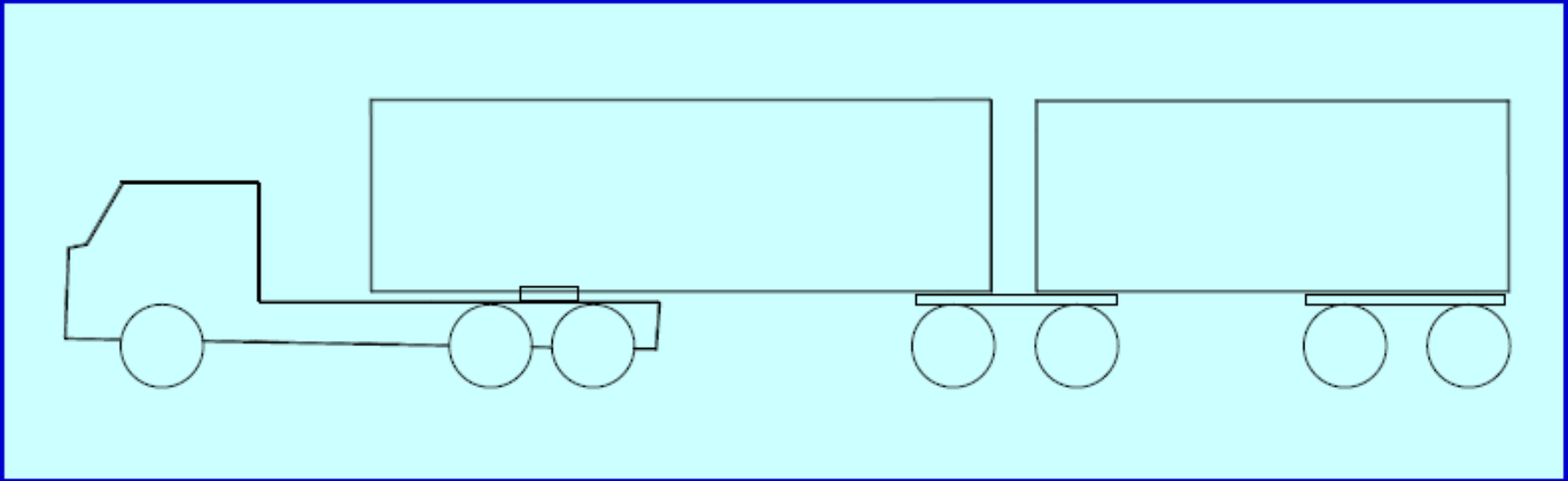
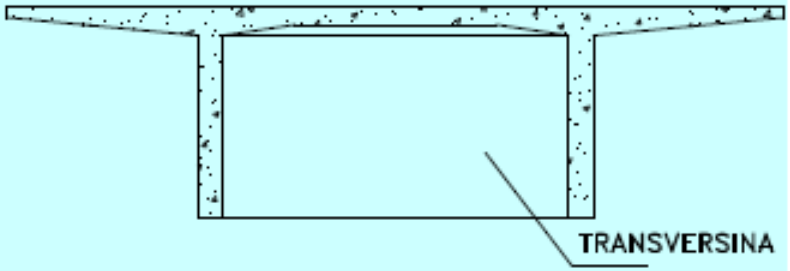


Figura 38. Bi-trem – com sete eixos

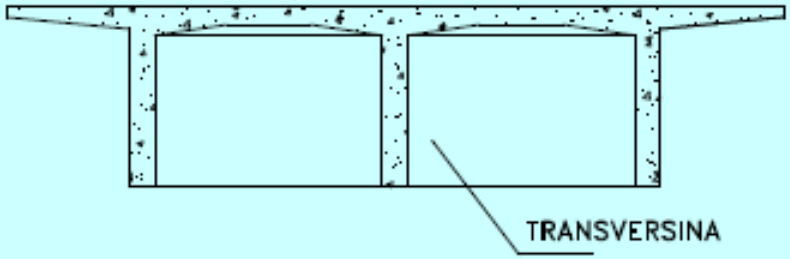
Estruturas de pontes

SEÇÃO EM LAJE

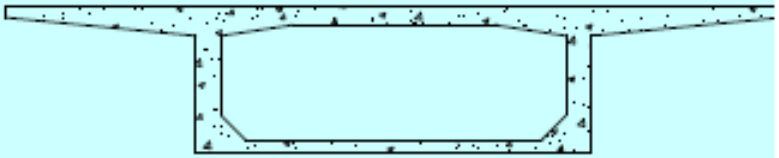
SEÇÃO EM DUAS VIGAS



SEÇÃO EM VIGAS MÚLTIPLAS



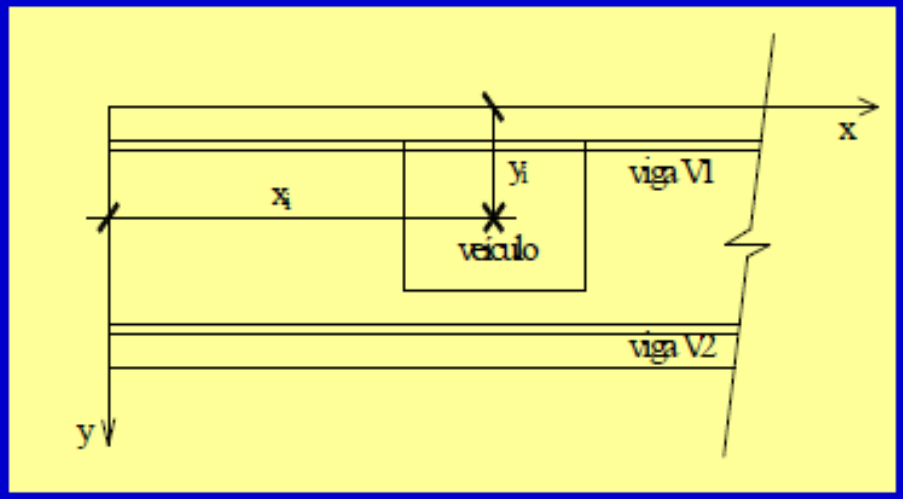
SEÇÃO EM CÉLULA



Tipos de seções transversais em pontes de concreto moldadas no local

Estruturas de pontes

ANÁLISE DA DISTRIBUIÇÃO DA CARGA ACIDENTAL SEGUNDO A SEÇÃO TRANSVERSAL



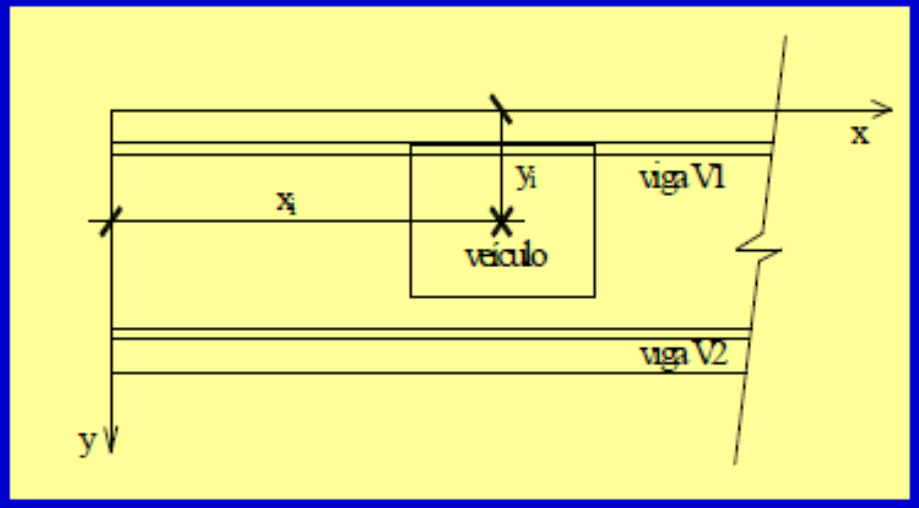
O ESFORÇO SOLICITANTE NA VIGA DEPENDE DA POSIÇÃO DA CARGA P (acidental) EM PLANTA (x,y).

O PROBLEMA É RESOLVIDO ANALISANDO SEPARADAMENTE O PROBLEMA

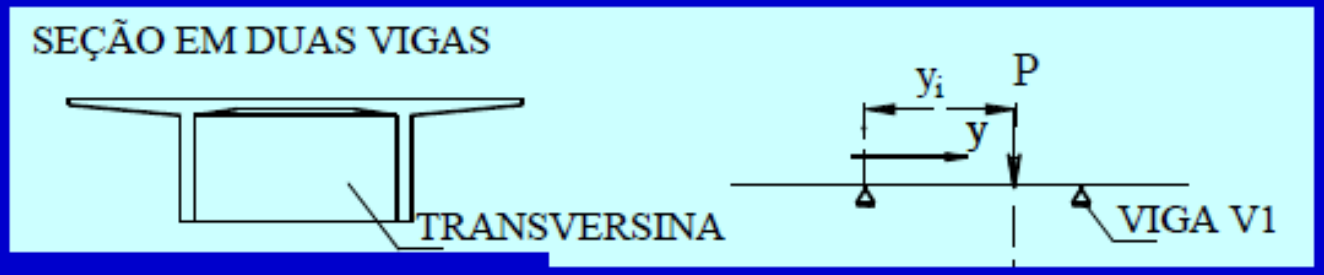
INICIALMENTE ESTUDA-SE QUAL É A PIOR SITUÇÃO, OU SEJA, EM QUAL POSICIONAMENTO DA SEÇÃO TRANSVERSAL P PROVOCARÁ A MAIOR NA VIGA (POR EXEMPLO) V1

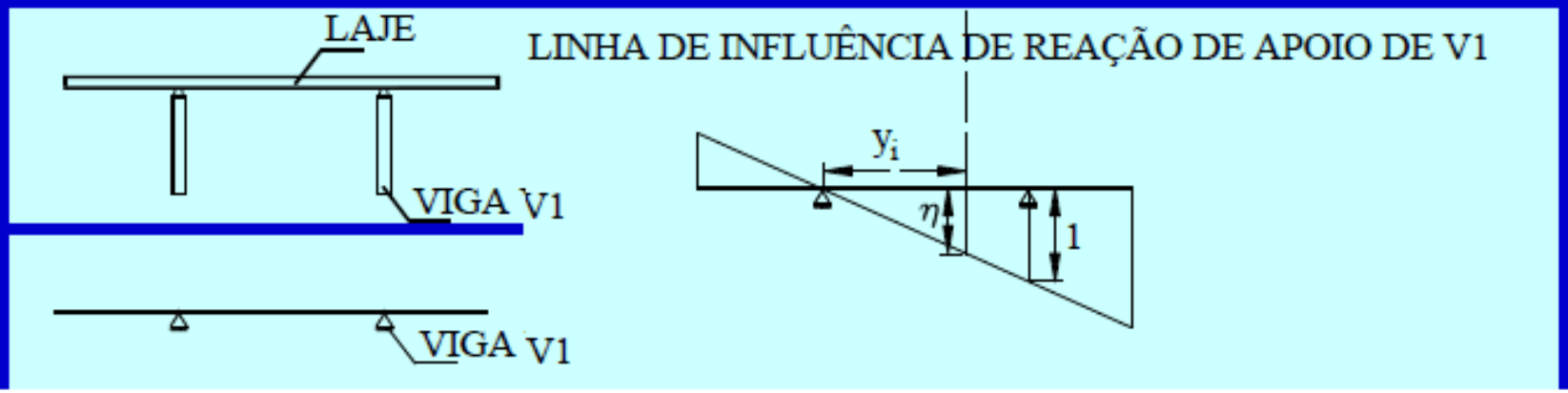
Estruturas de pontes

IMAGINANDO UMA PONTE COM SEÇÃO COM DUAS VIGAS



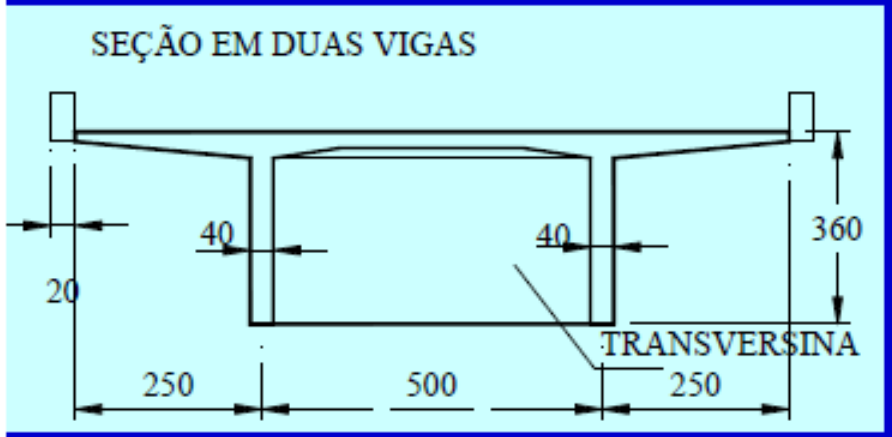
Assim é possível após obter a LI Carrega-la com o trem tipo normativo para obter um conjunto de ações que é denominado TTL



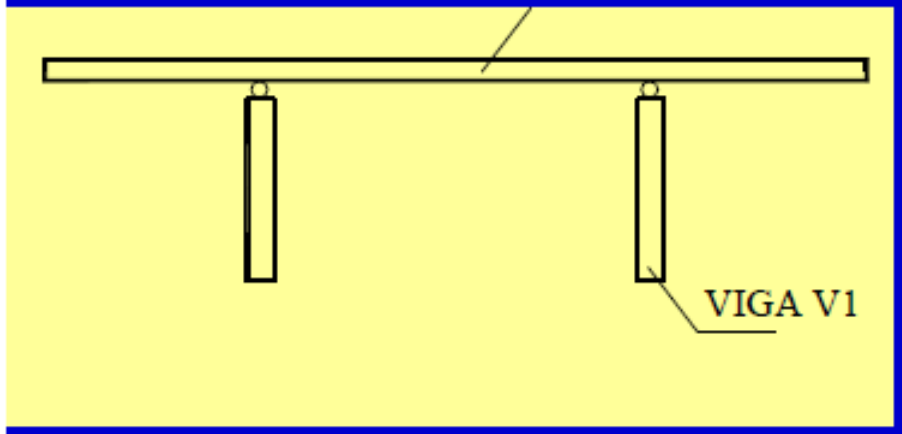


Estruturas de pontes

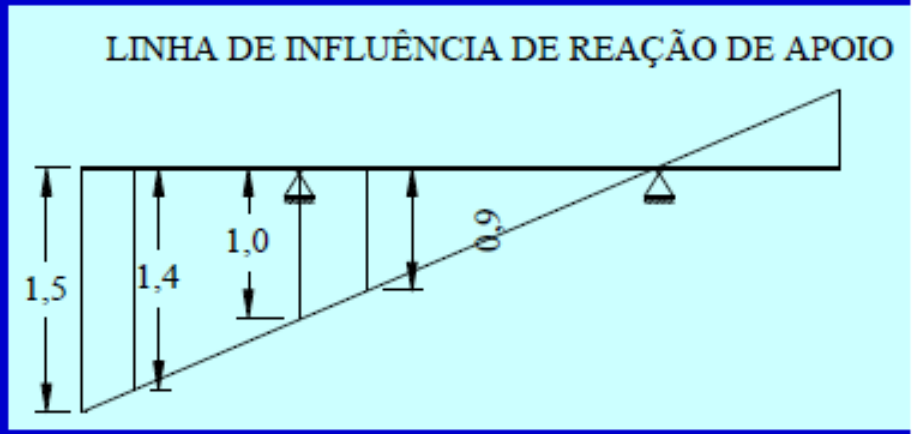
Assim definida o tipo de ponte



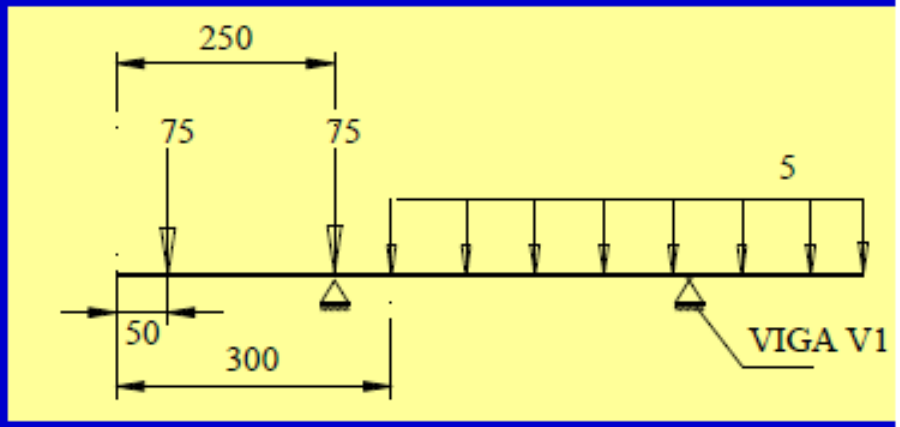
define-se o esquema da seção transversal



Obtem-se a LI de reação

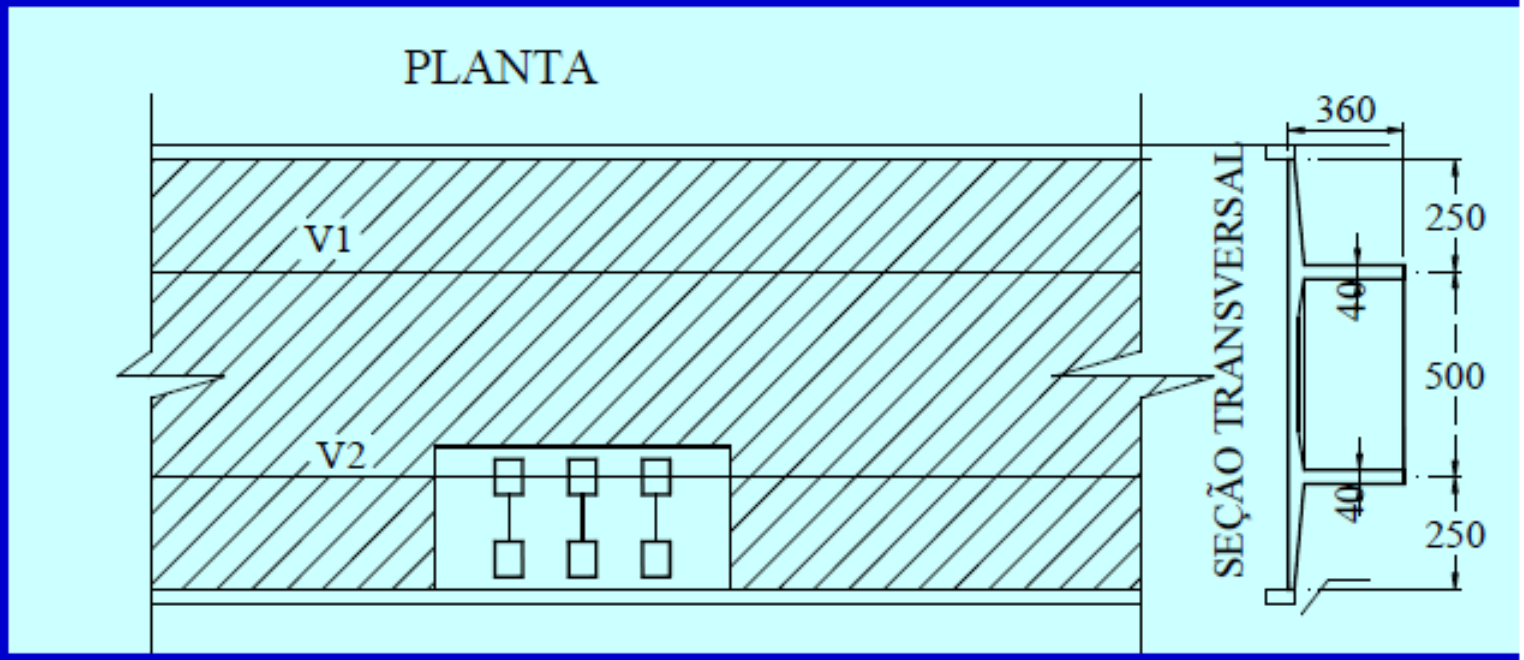


Carrega-se a LI com o trem tipo normativo para obter um conjunto de ações que é denominado TTL

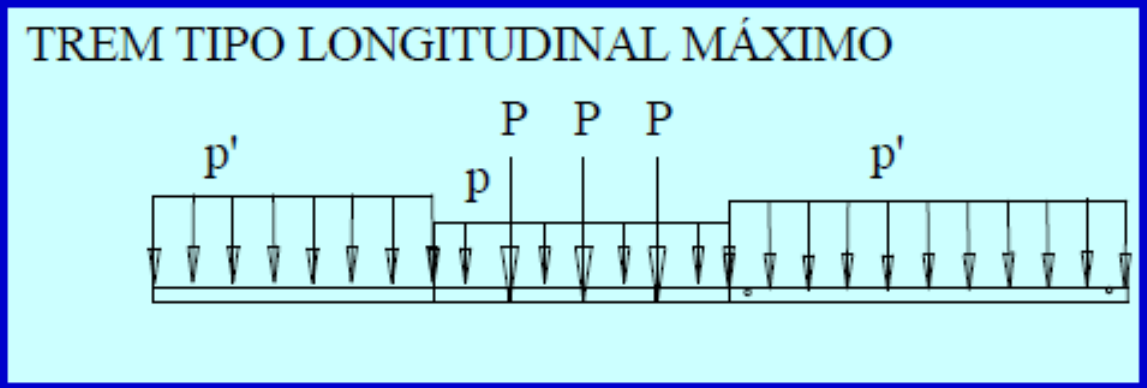


Estruturas de pontes

Carregamento do conjunto de ações Máximas para V2

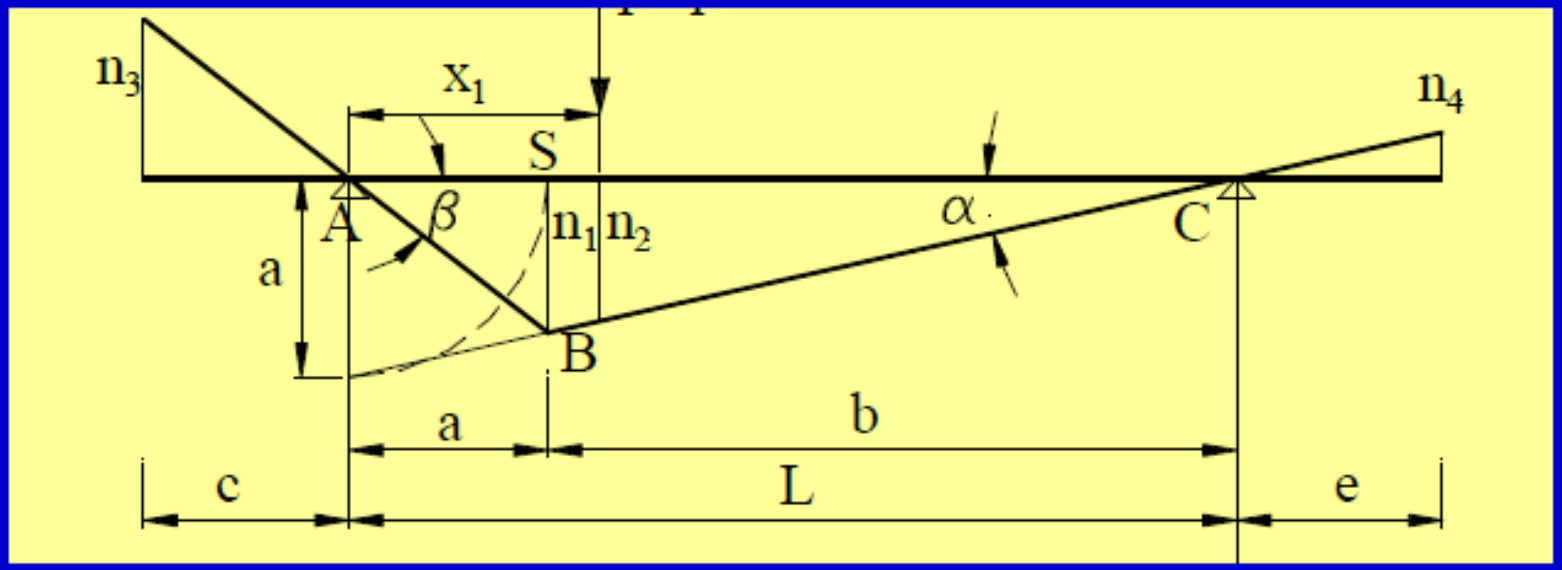


Resultando do trem tipo longitudinal máximo de V2



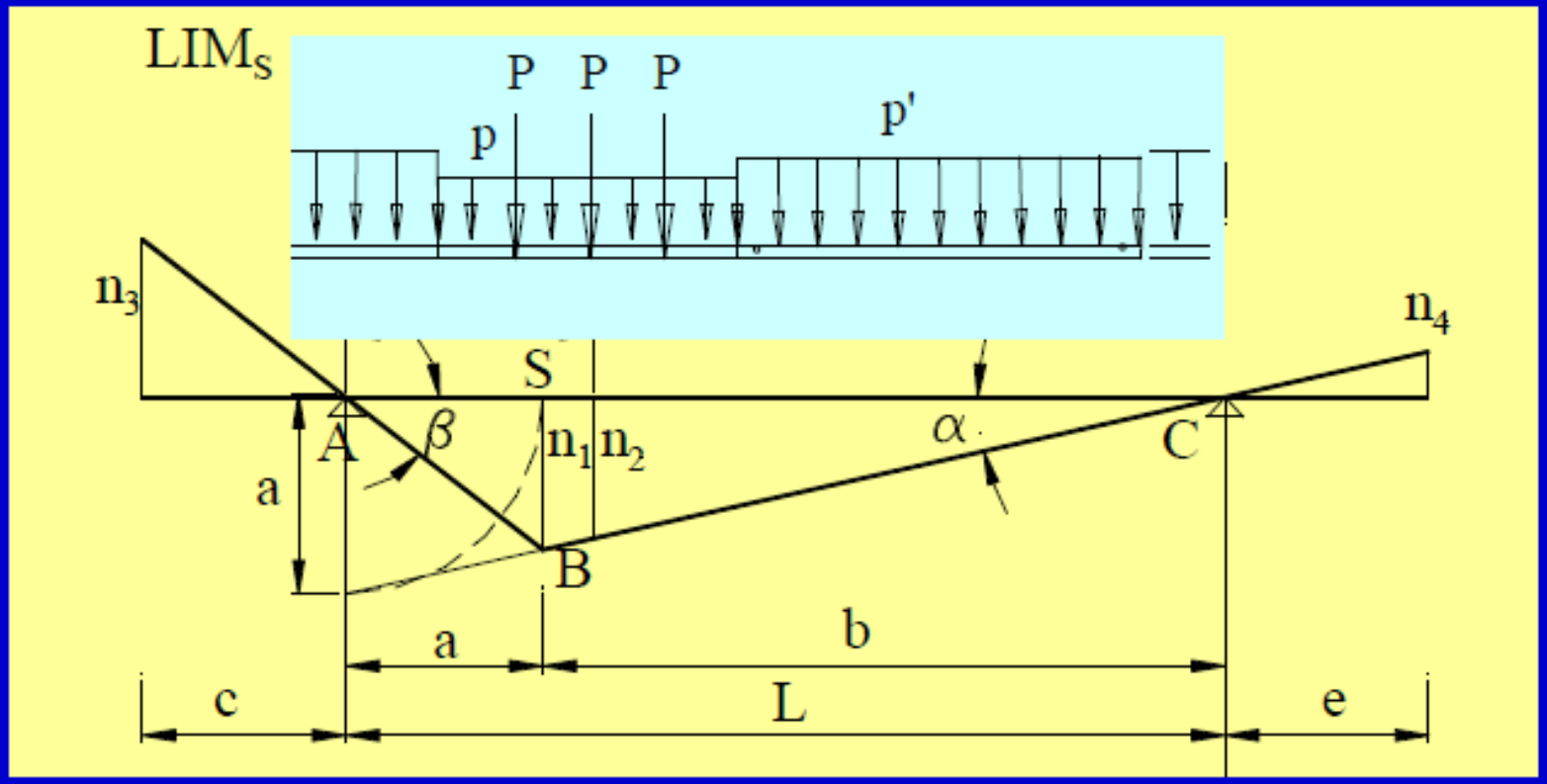
Estruturas de pontes

Para obter momentos máximos e mínimos é preciso primeiro obter a LI de momento fletor



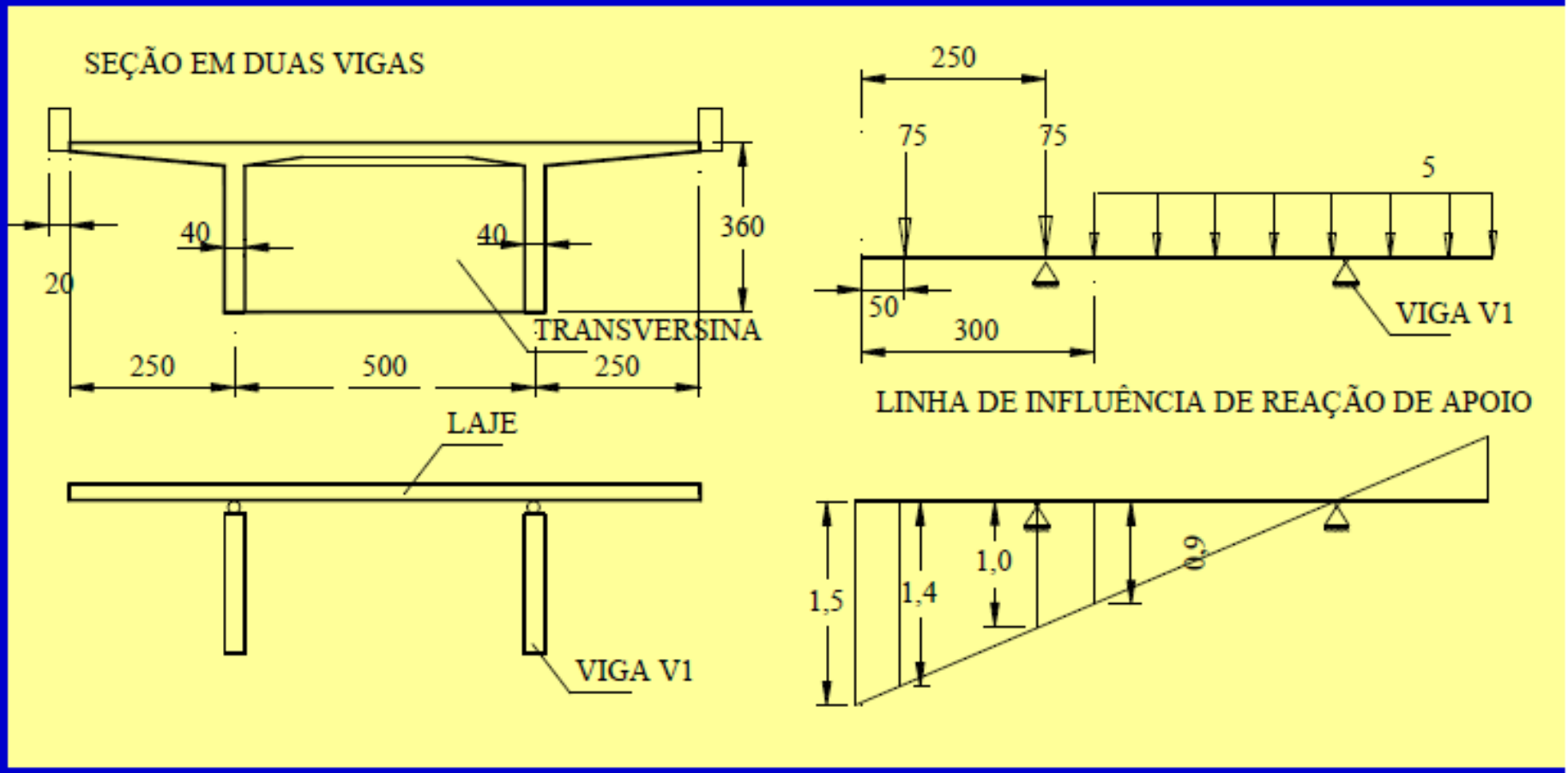
Estruturas de pontes

Para obter momentos máximos e mínimos é preciso carregar a LI de momento fletor



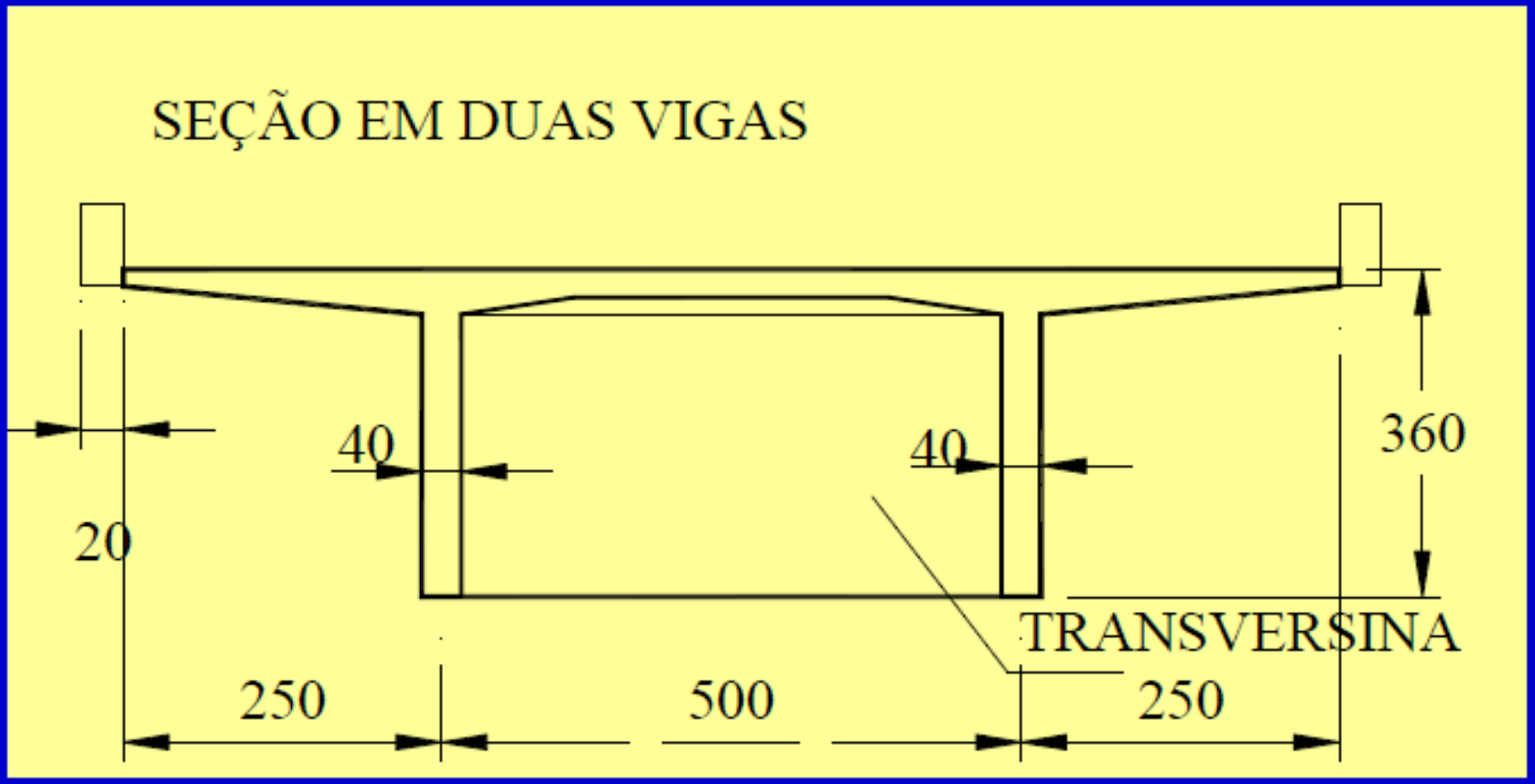
Estruturas de pontes

Exemplo numérico 1- Calcular o trem tipo longitudinal máximo para a ponte com seção transversal de duas vigas dada na figura 41, considerando o trem tipo classe 45.



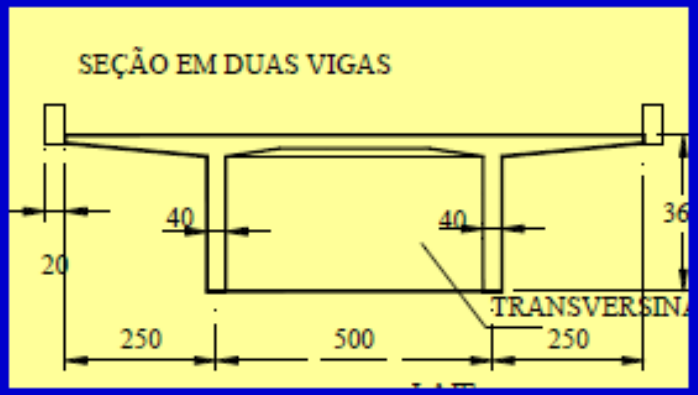
Estruturas de pontes

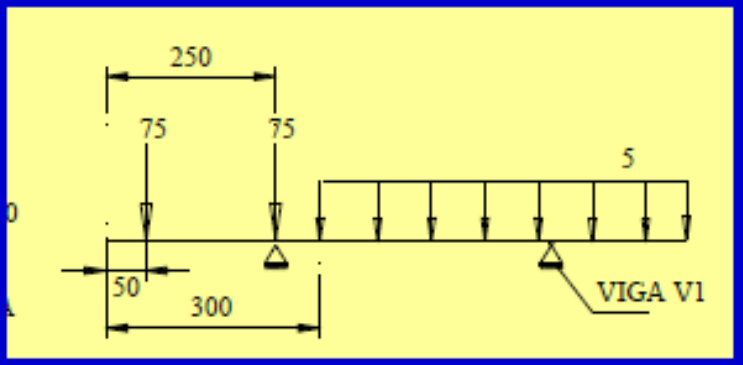
Exemplo numérico 1- Calcular o trem tipo longitudinal máximo para a ponte com seção transversal de duas vigas dada na figura considerando o trem tipo classe 45.

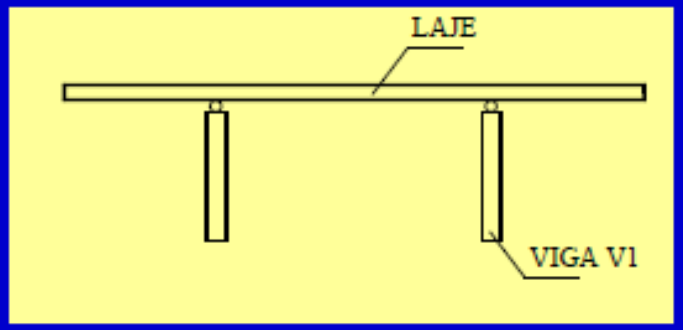


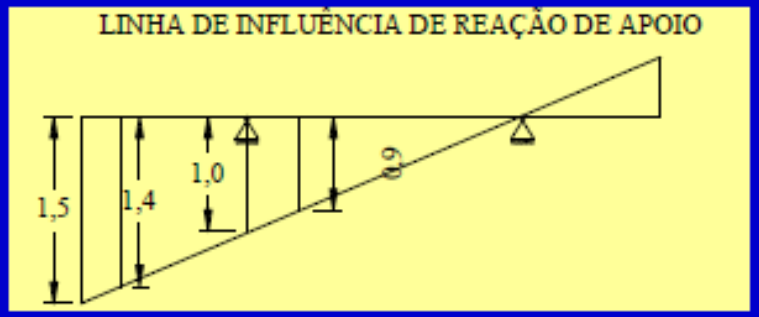
Estruturas de pontes

Resolução.



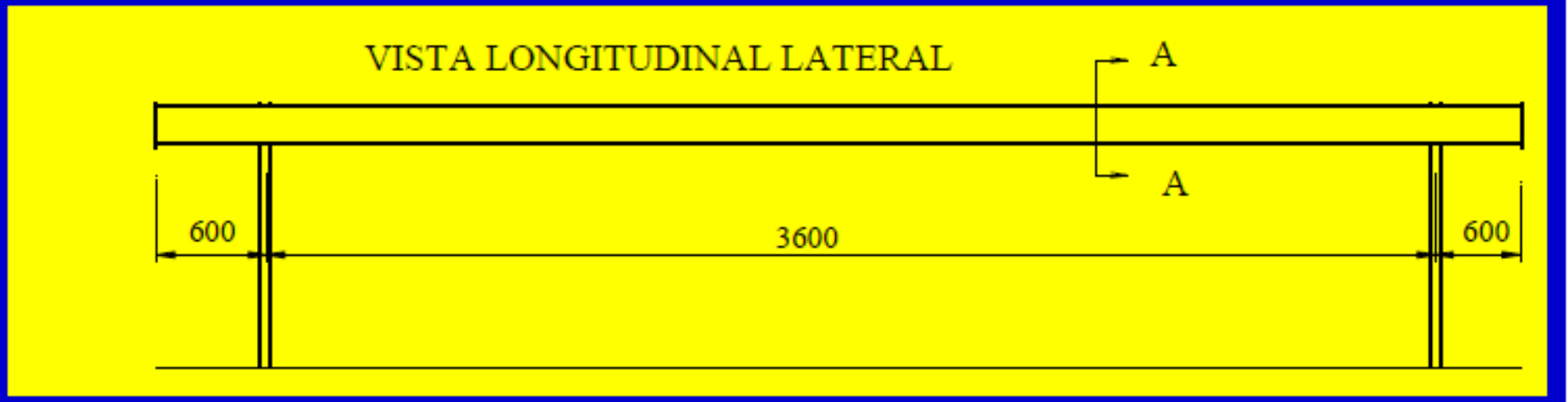






Estruturas de pontes

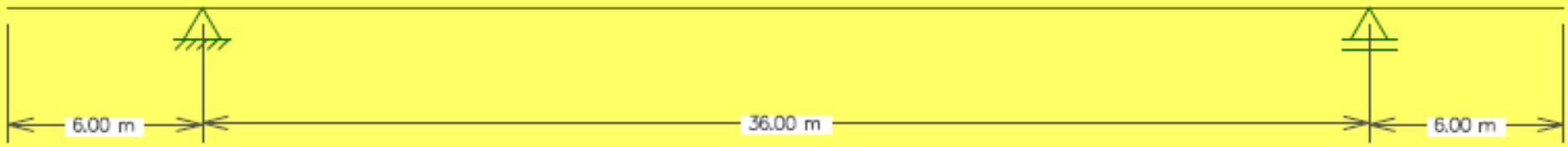
Exemplo numérico 2- Calcular para a ponte e o TTL dado ós momentos máximos e mínimos fletores em S5.



Estruturas de pontes

Exemplo numérico 2- Resolução

Esquema estrutural da viga



Estruturas de pontes

Exemplo numérico 2- Resolução

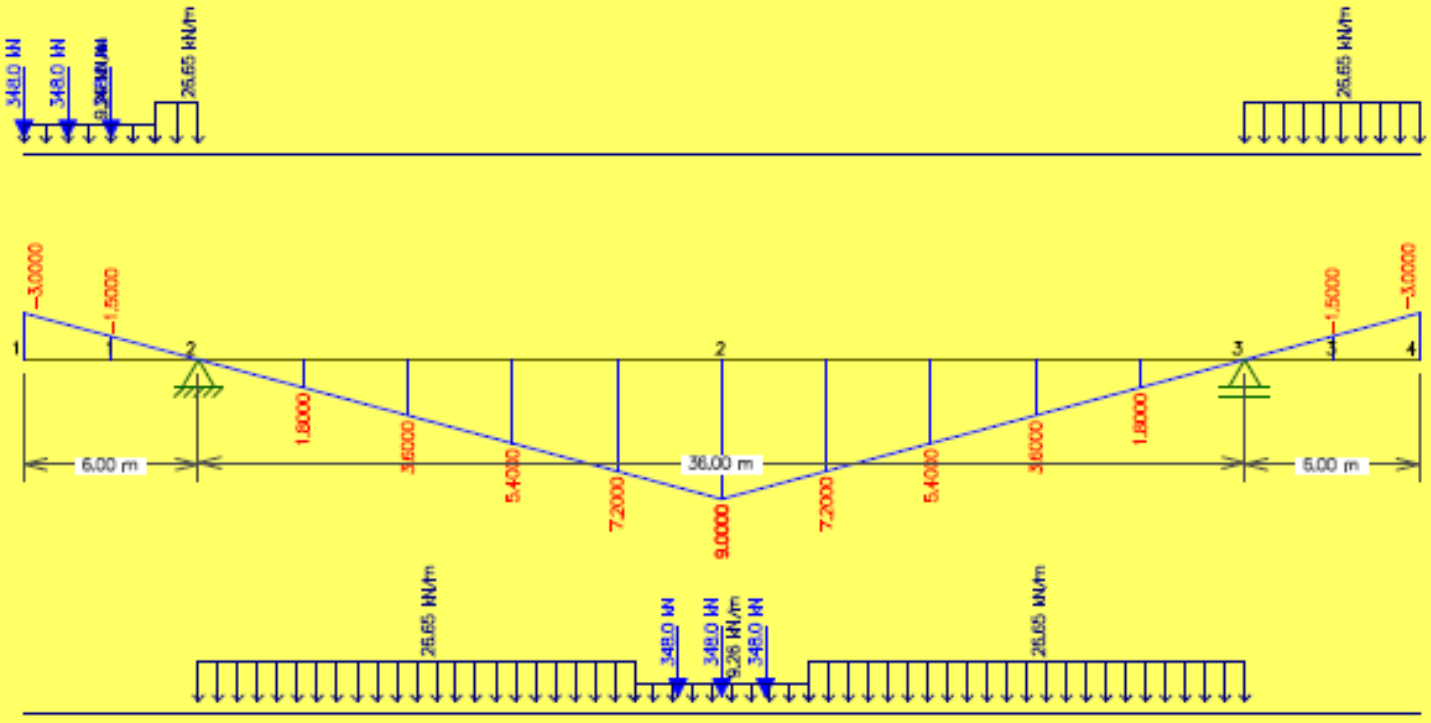
Valores da linha de influência
Member
Bending Moment
Influence Line
Init: 0.0000 m
End: 0.0000 m
Results Along Member:

x [m]	Bending Moment Infl. Line [m]
0.00	0.0000
3.60	1.8000
7.20	3.6000
10.80	5.4000
14.40	7.2000
18.00	9.0000
21.60	7.2000
25.20	5.4000
28.80	3.6000
32.40	1.8000
36.00	0.0000

Estruturas de pontes

Exemplo numérico 2- Resolução

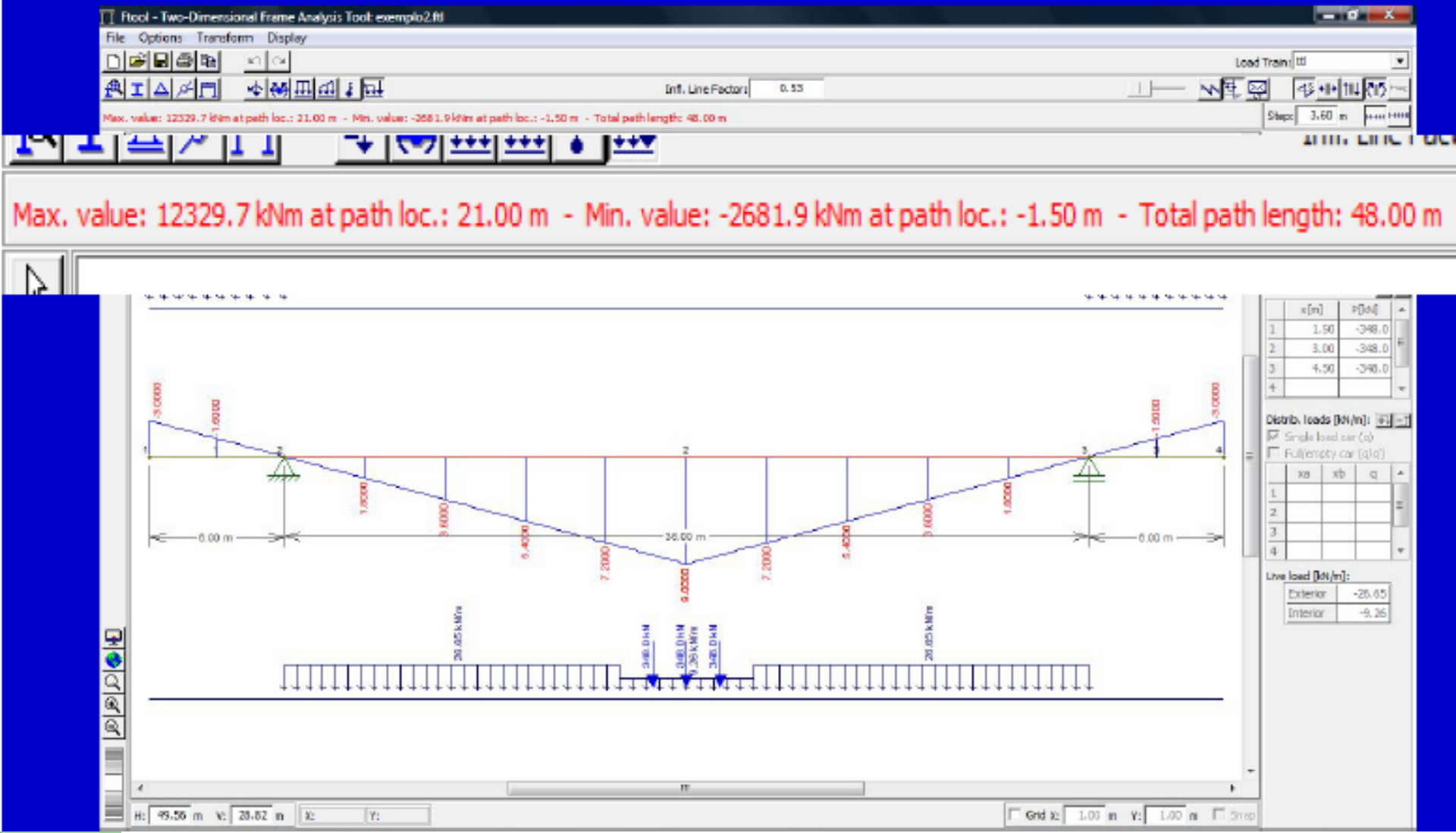
Linha de influencia da seção S5 (meio do vão) carregada com o TTL máximo e mínimo



Estruturas de pontes

Exemplo numérico 2- Resolução

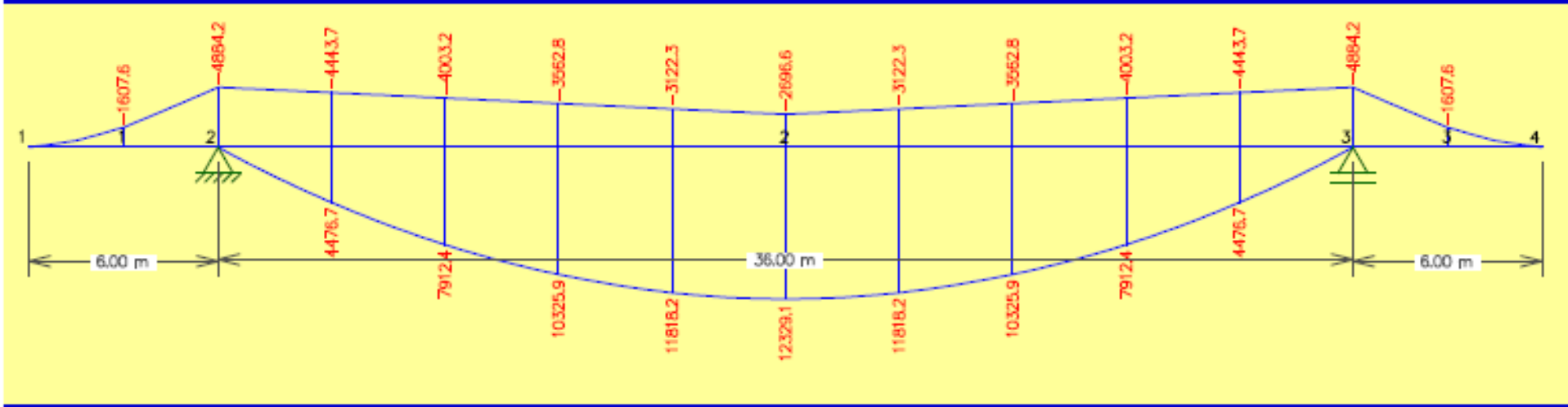
O valor em cada seção é obtido clicando em uma seção (fornecida pelo step)

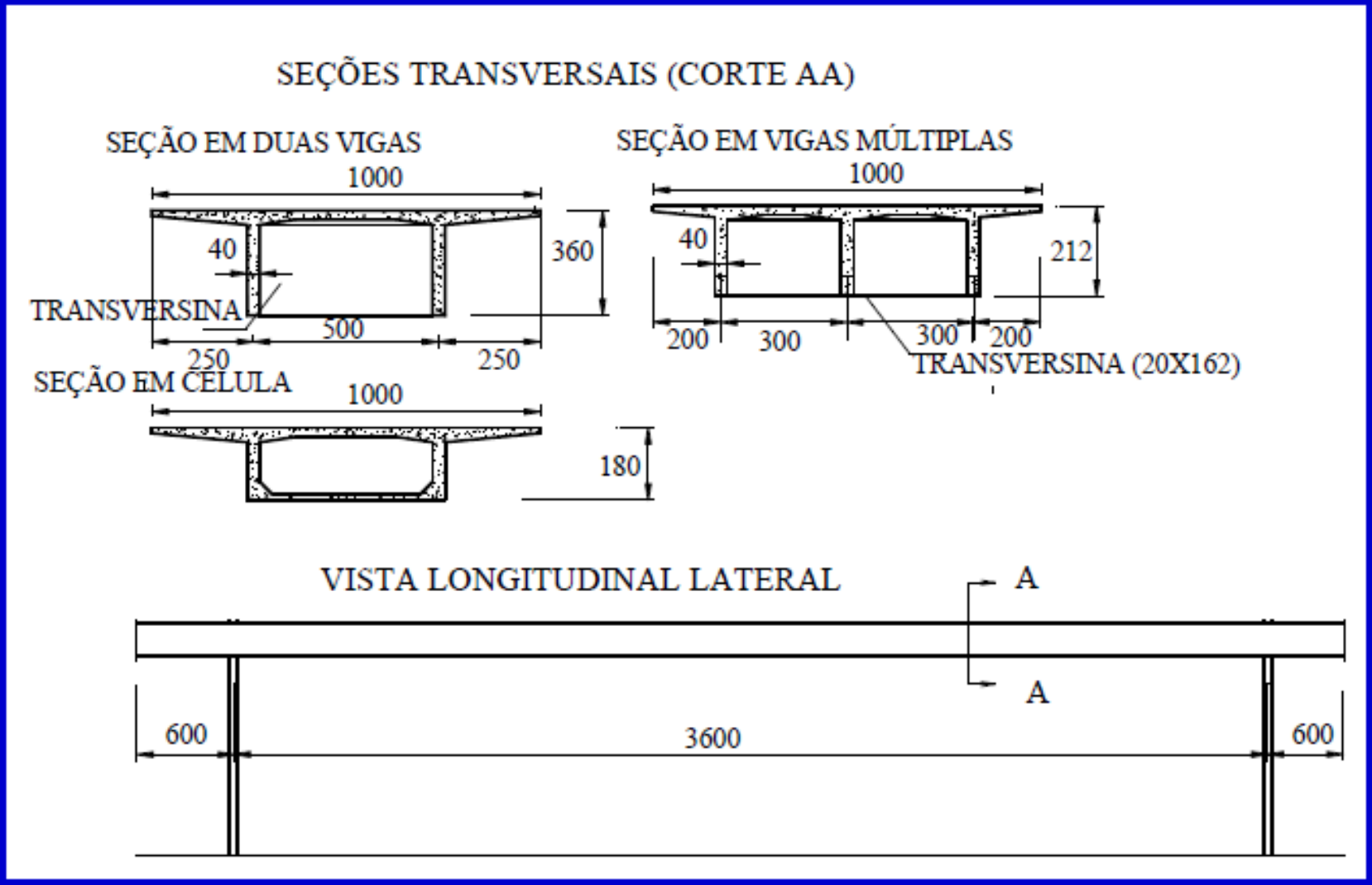


Estruturas de pontes

Exemplo numérico 2- Resolução

O Mas não é só o FTOOL também fornece a envoltória de esforços devido o TTL



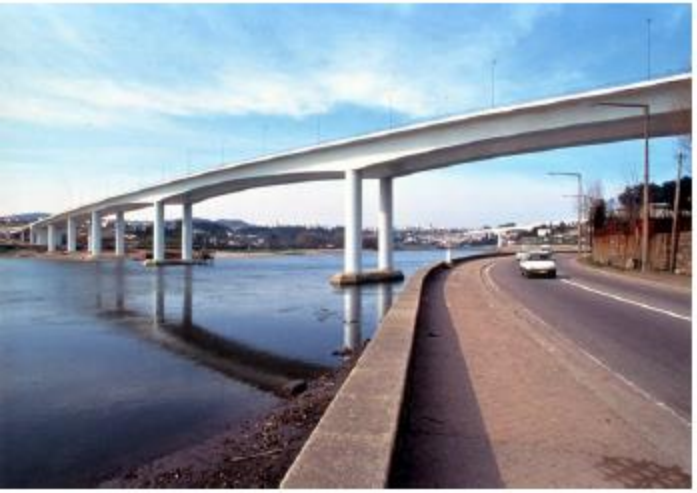

SEÇÕES TRANSVERSAIS (CORTE AA)
SEÇÃO EM DUAS VIGAS
1000
40
360
TRANSVERSINA
500
250
250
SEÇÃO EM VIGAS MÚLTIPLAS
1000
40
212
200
300
300
200
TRANSVERSINA (20X162)
SEÇÃO EM CÉLULA
1000
180
VISTA LONGITUDINAL LATERAL
A
A
600
3600
600

Linhas de Influência

1. Aplicações
2. Objetivos
3. Trem-Tipo
4. Definição
5. Vigas
6. Treliças

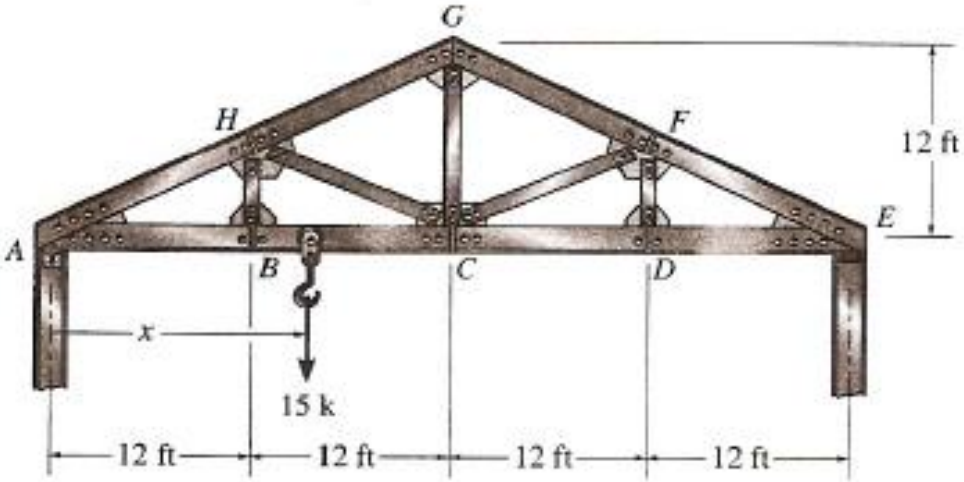
APLICAÇÕES

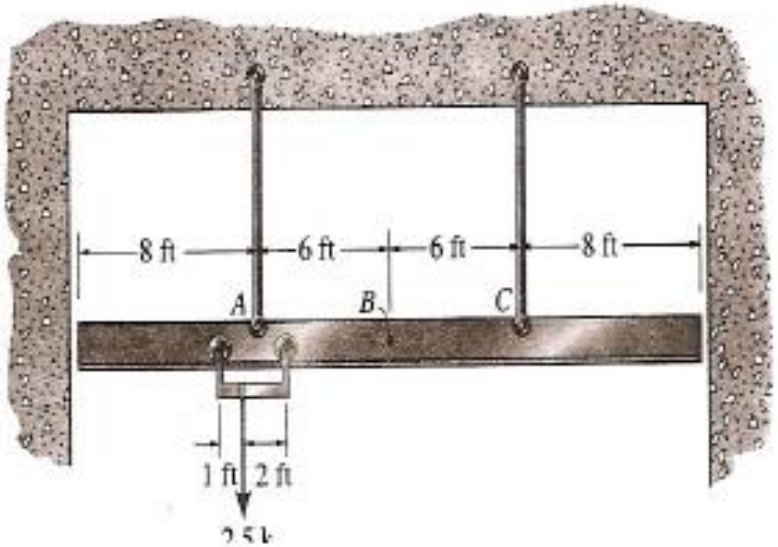
a. Pontes em vigas

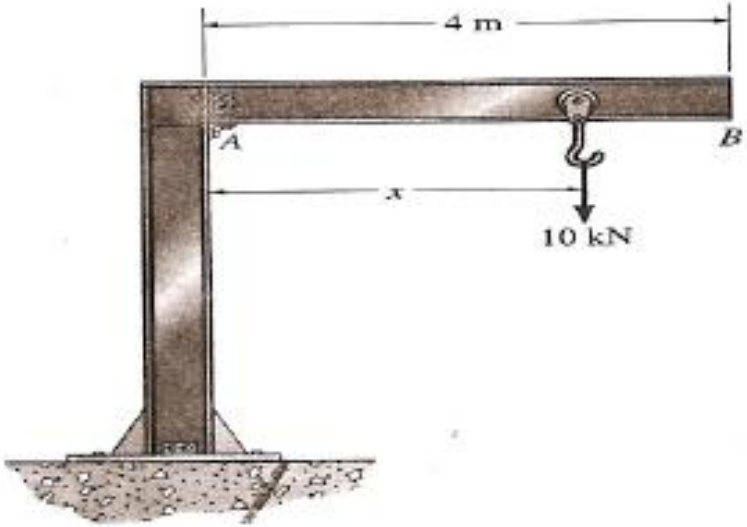


Pontes treliçadas

Pontes rolantes

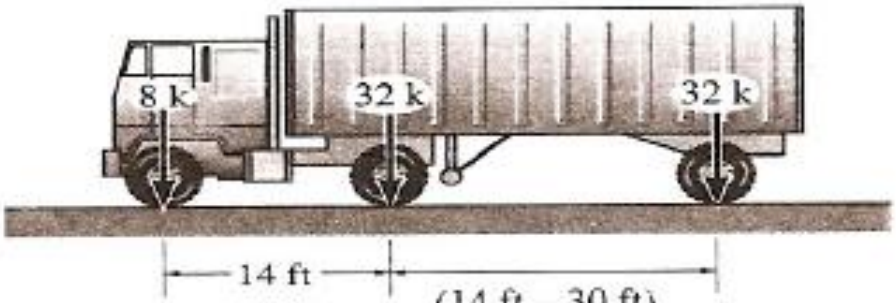






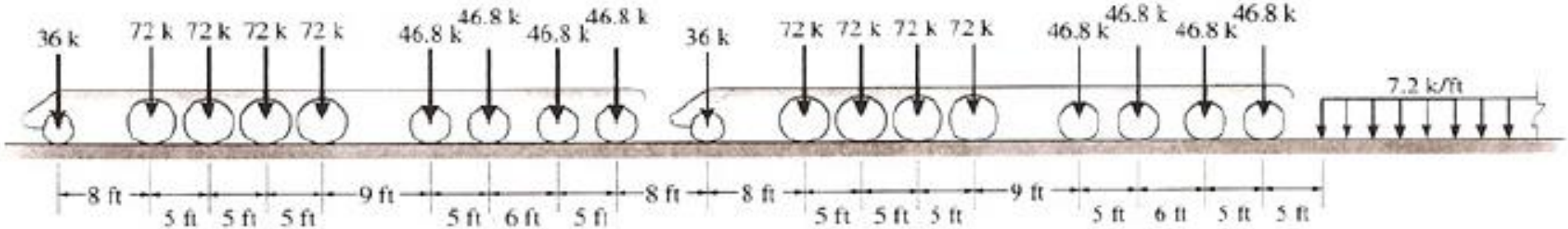
Pontes rodoviária e ferroviária

Ponte rodoviária



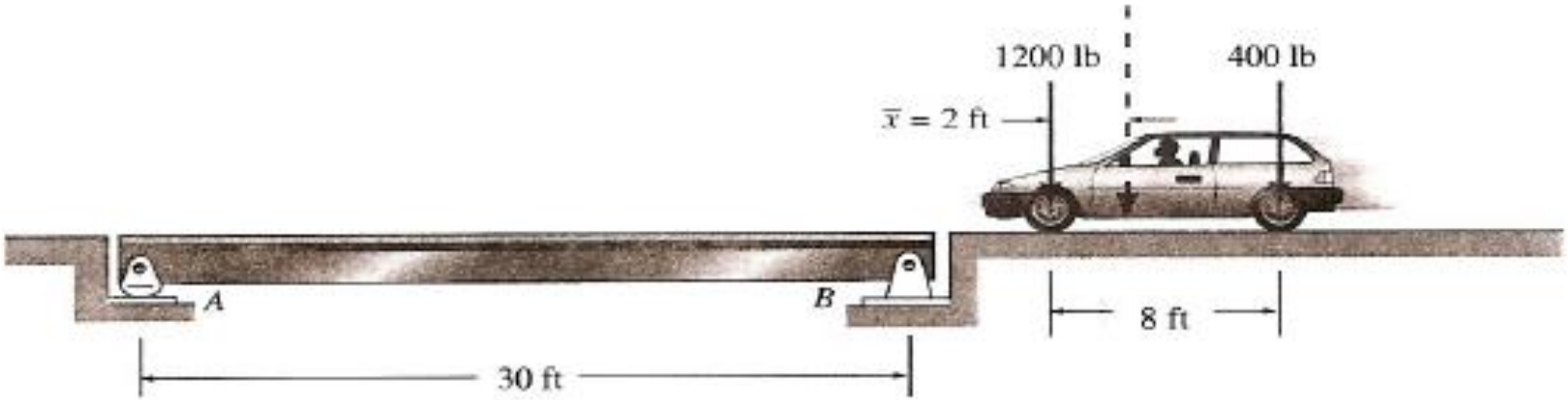
HS 20 – 44 loading

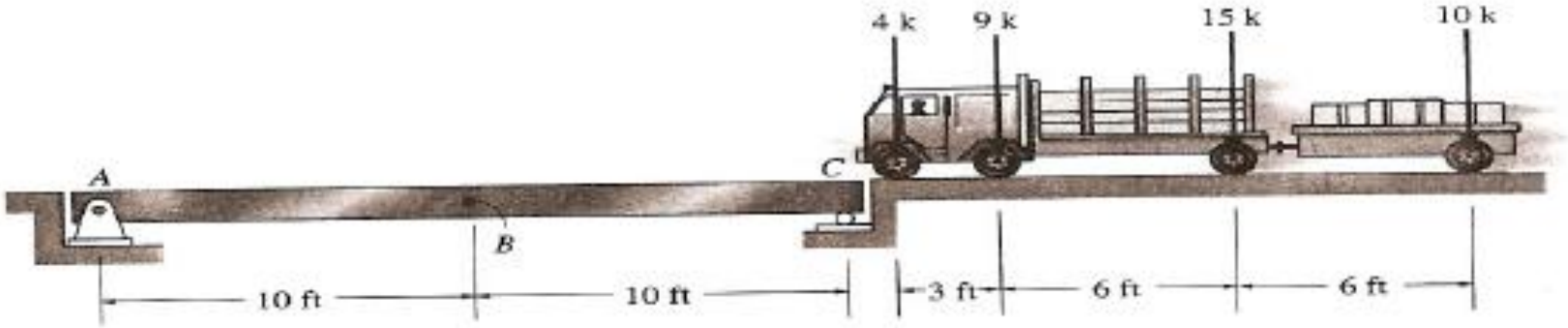
Ponte ferroviária

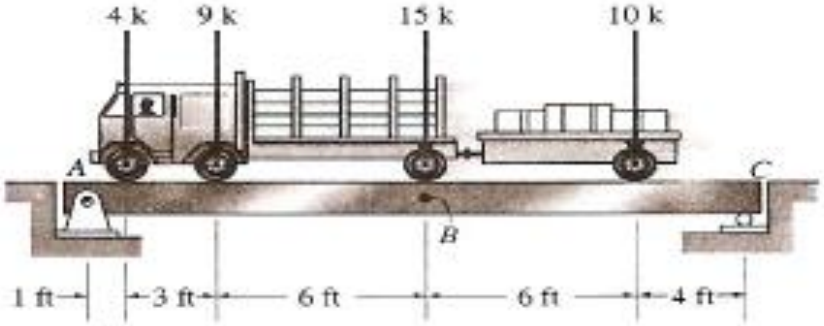


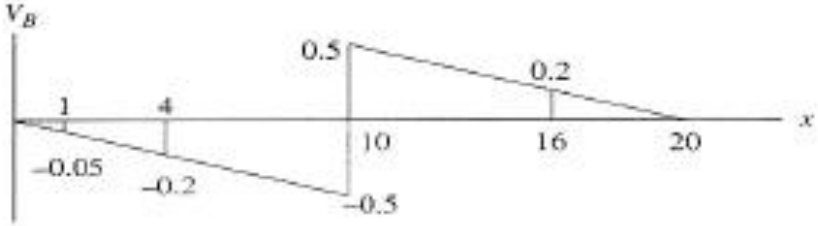
E–72 loading

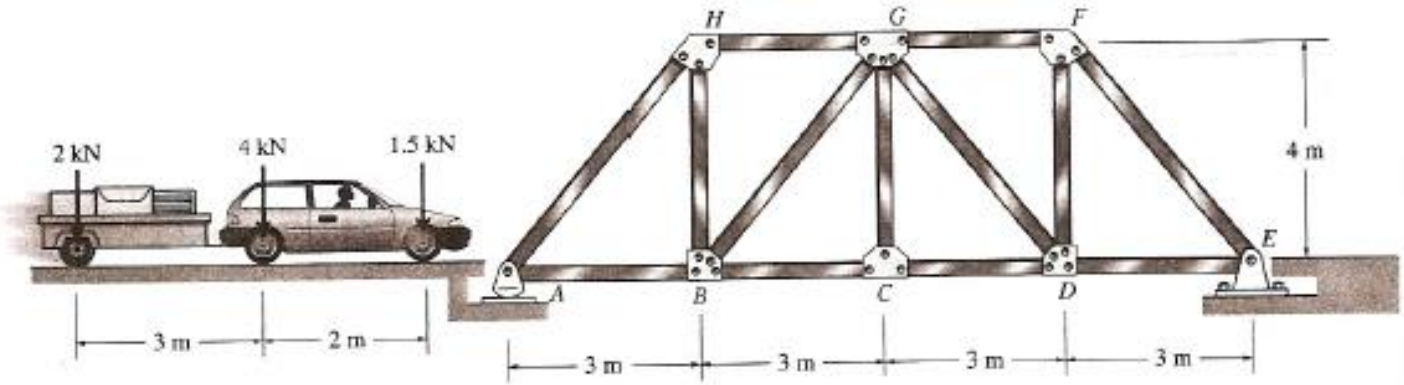
OBJETIVOS

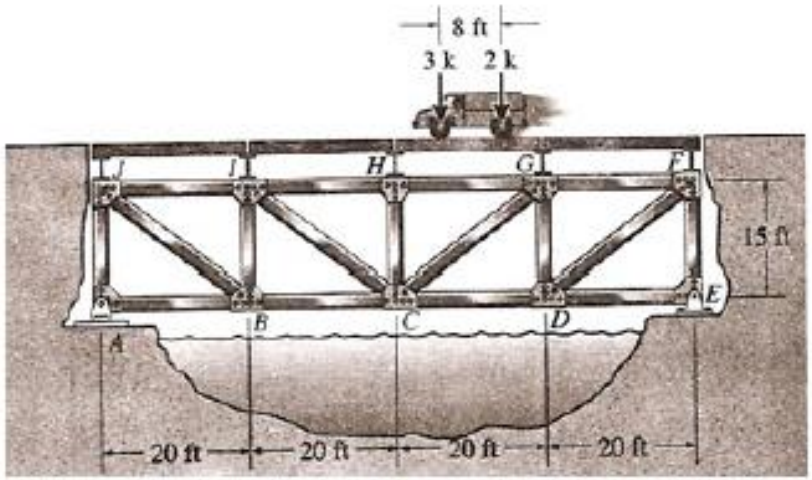

1200 lb
400 lb
$\bar{x}$ = 2 ft
A
B
8 ft
30 ft

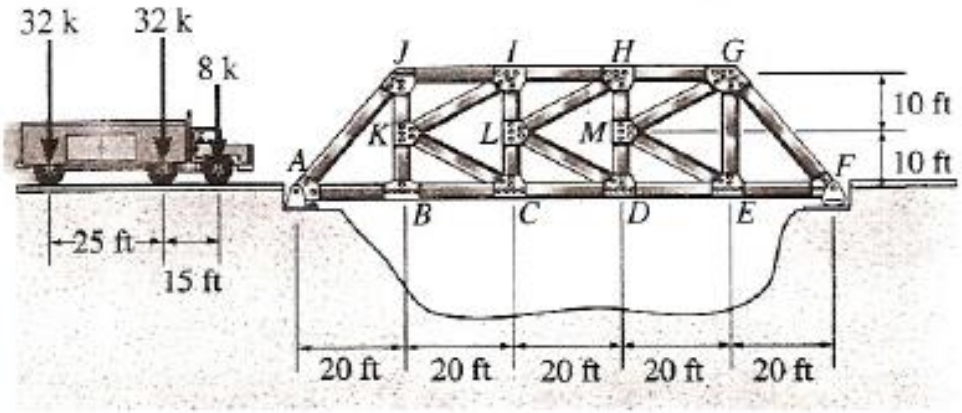

4 k
9 k
15 k
10 k
A
B
C
10 ft
10 ft
3 ft
6 ft
6 ft


4 k
9 k
15 k
10 k
A
B
C
1 ft
3 ft
6 ft
6 ft
4 ft

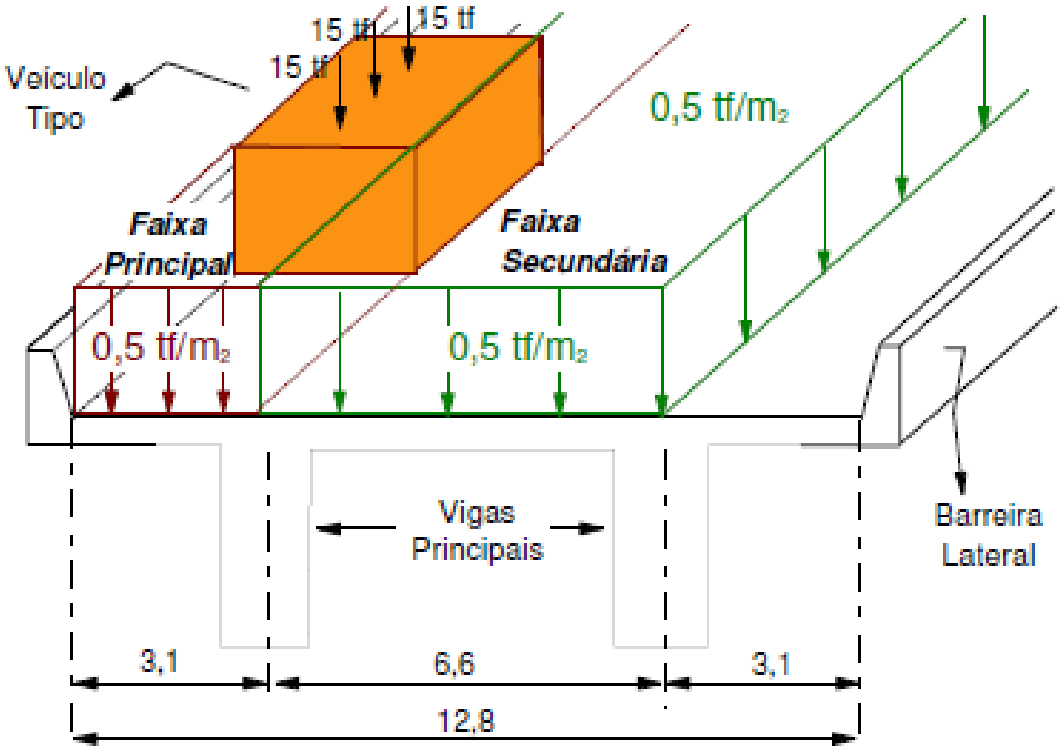

V_B
0.5
0.2
1
4
10
16
20
x
−0.05
−0.2
−0.5

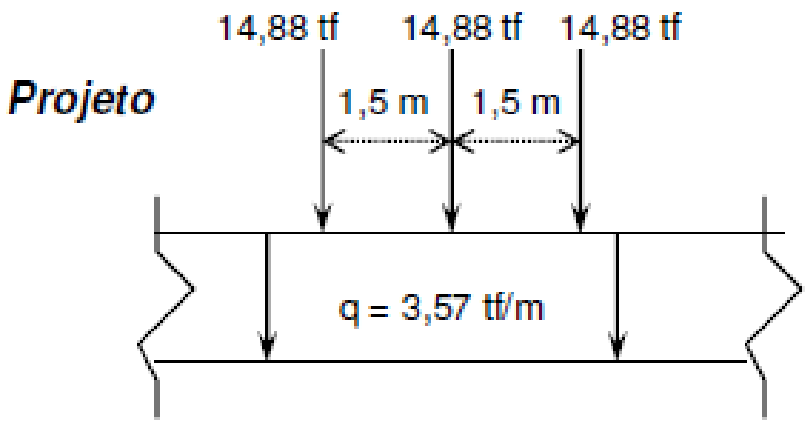

2 kN
4 kN
1.5 kN
3 m
2 m
H
G
F
4 m
E
A
B
C
D
3 m
3 m
3 m
3 m

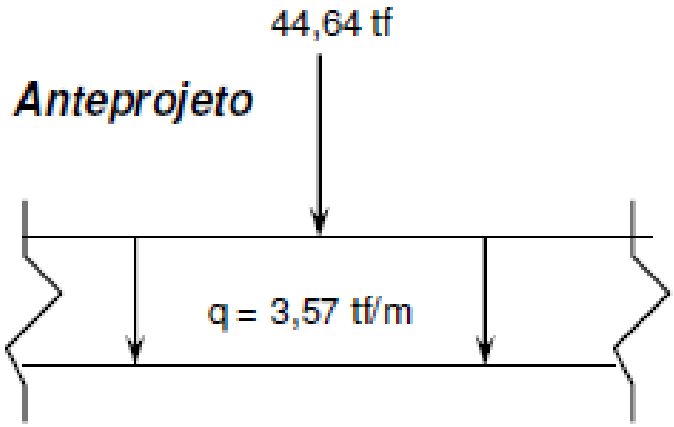

8 ft
3 k
2 k
J
I
H
G
F
15 ft
E
A
B
C
D
20 ft
20 ft
20 ft
20 ft

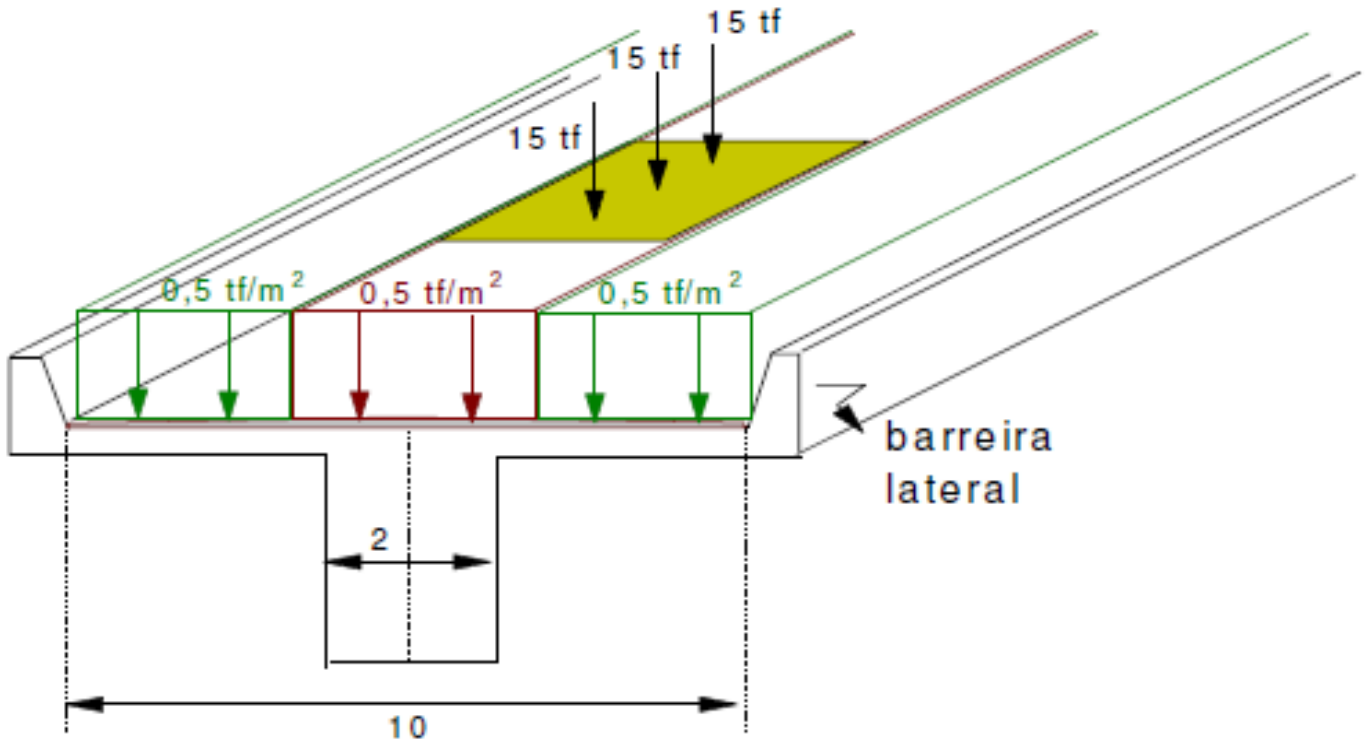

32 k
32 k
8 k
J
I
H
G
10 ft
10 ft
K
L
M
A
F
B
C
D
E
25 ft
15 ft
20 ft
20 ft
20 ft
20 ft
20 ft

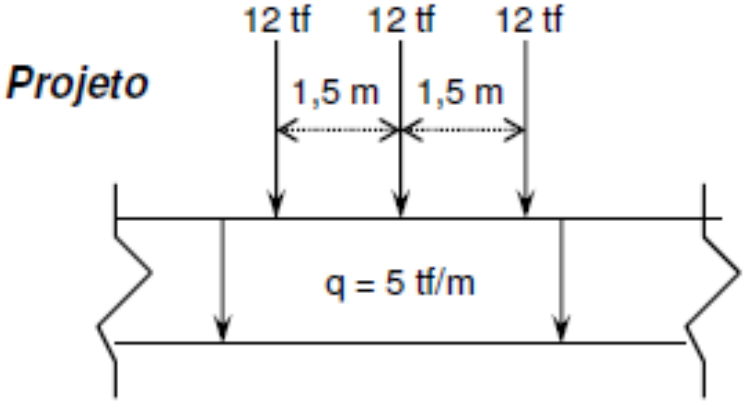
TREM-TIPO

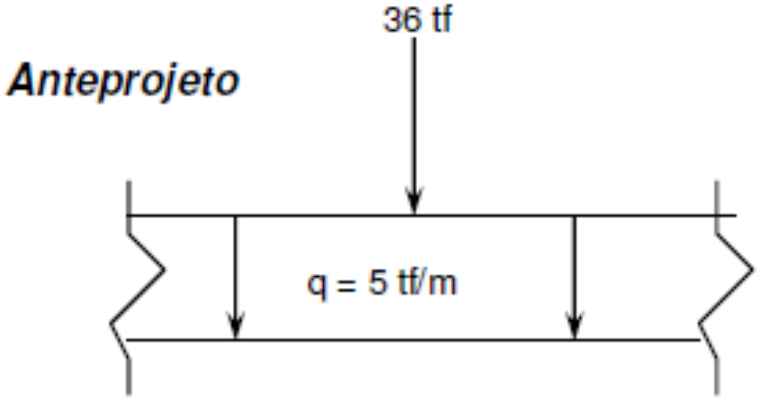

15 tf
15 tf
15 tf
Veículo
Tipo
0,5 tf/m₂
Faixa
Principal
Faixa
Secundária
0,5 tf/m₂
0,5 tf/m₂
Vigas
Principais
Barreira
Lateral
3,1
6,6
3,1
12,8


Projeto
14,88 tf
14,88 tf
14,88 tf
1,5 m
1,5 m
q = 3,57 tf/m


Anteprojeto
44,64 tf
q = 3,57 tf/m


15 tf
15 tf
15 tf
0,5 tf/m 2
0,5 tf/m 2
0,5 tf/m 2
barreira
lateral
2
10

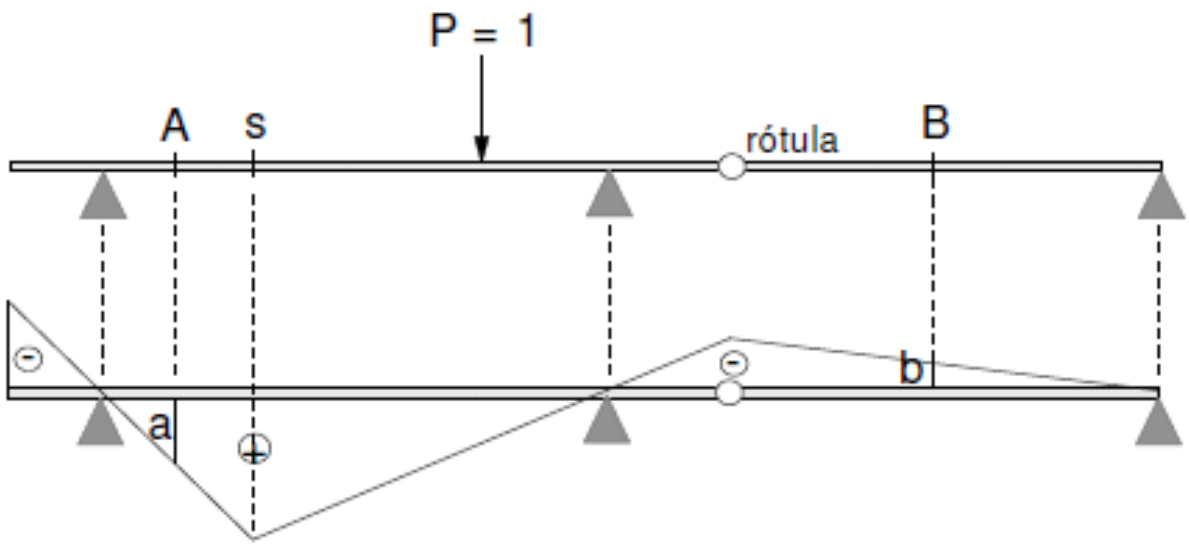

Projeto
12 tf
12 tf
12 tf
1,5 m
1,5 m
q = 5 tf/m


Anteprojeto
36 tf
q = 5 tf/m

DEFINIÇÃO

Linha de influência de um efeito elástico em uma dada seção S é a representação gráfica ou analítica do valor desse efeito, naquela seção S, produzido por uma carga unitária, de cima para baixo, que percorre a estrutura.

Exemplo:



- $M_s = a \rightarrow P = 1$ em A
- $M_s = -b \rightarrow P = 1$ em B

Observações:

- ✓ A seção e o efeito estudados são fixos, a posição da carga é que varia.
- ✓ Não confundir: linha de Influência x diagrama Solicitante.
- ✓ Efeitos elásticos: momento fletor, esforço cortante, reação de apoio e deformação (flecha).
- ✓ Considerar válido o Princípio da Superposição dos Efeitos.

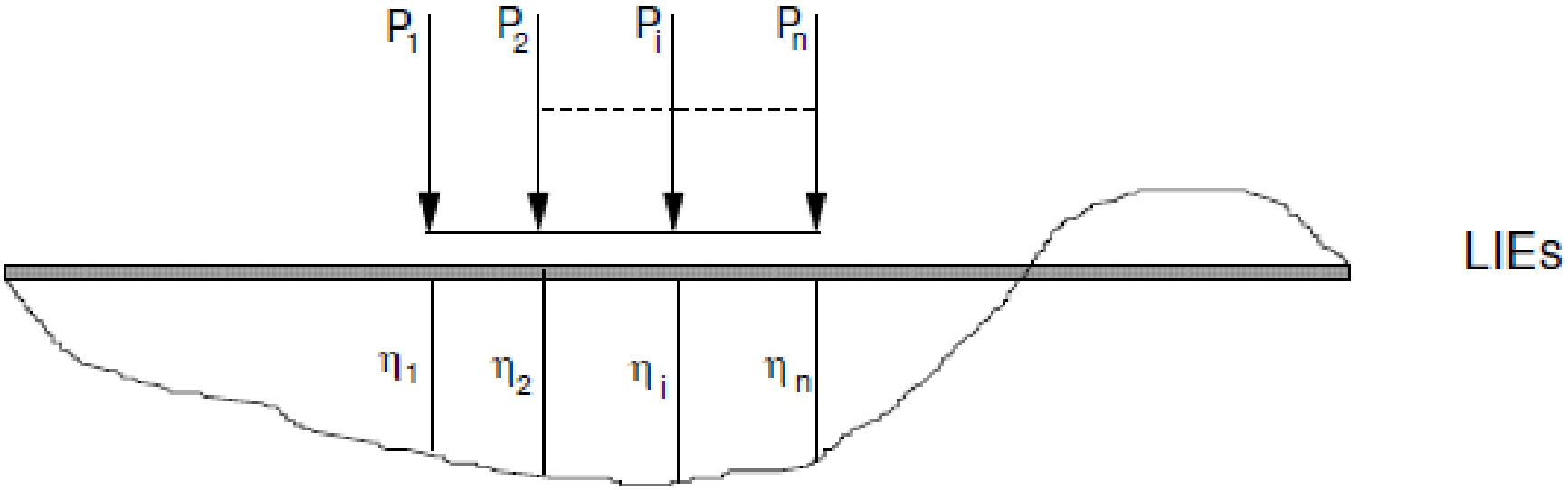
Fases de Solução do Problema:

1ª FASE: Definida a **classe da ponte** e as plantas arquitetônicas, obter o **trem-tipo**.

2ª FASE: Dada a estrutura, o efeito elástico E e a seção S, obter **a linha de influência**.

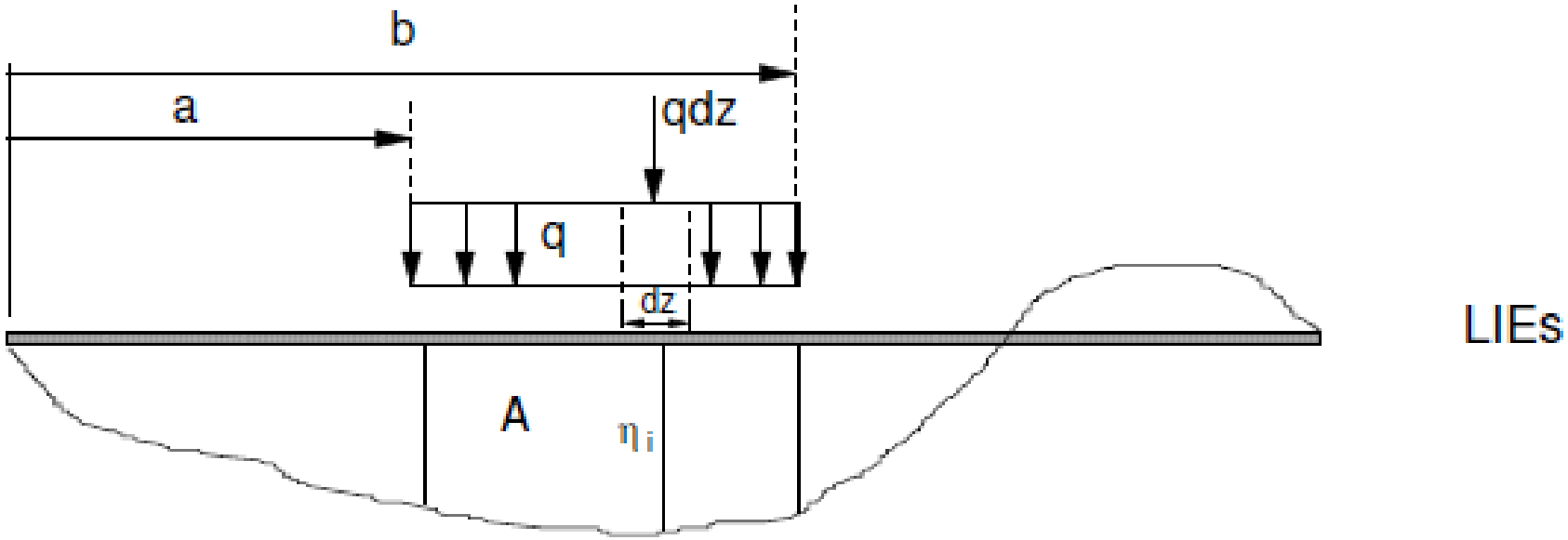
3ª FASE: Conhecidos o trem-tipo e a linha de influência, obter **os efeitos devido a esse trem-tipo**. Sejam os exemplos:

a. TREM-TIPO formado apenas por CARGAS CONCENTRADAS



$$E_s = \sum_{i=1}^{n} P_i \eta_i$$ (Princípio da superposição dos efeitos)

b. TREM-TIPO formado apenas por CARGAS DISTRIBUÍDAS



$$E_s = \int_a^b (qdz)\,\eta_i \text{ , ou seja,}$$

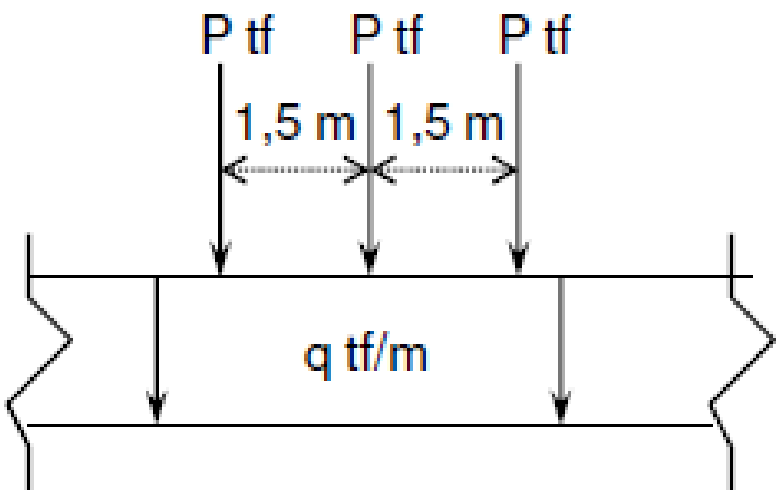
$$E_s = q\int_a^b \eta_i\,dz \;\therefore$$

$$E_s = qA \qquad \text{pois,} \quad A = \int_a^b \eta_i\,dz \qquad \text{(Princípio da superposição dos efeitos)}$$

c. **CASO GERAL** (superposição dos casos 1 e 2)

$$E_s = \sum_{i=1}^{n} P_i \eta_i + q\,A$$

(Princípio da superposição dos efeitos)



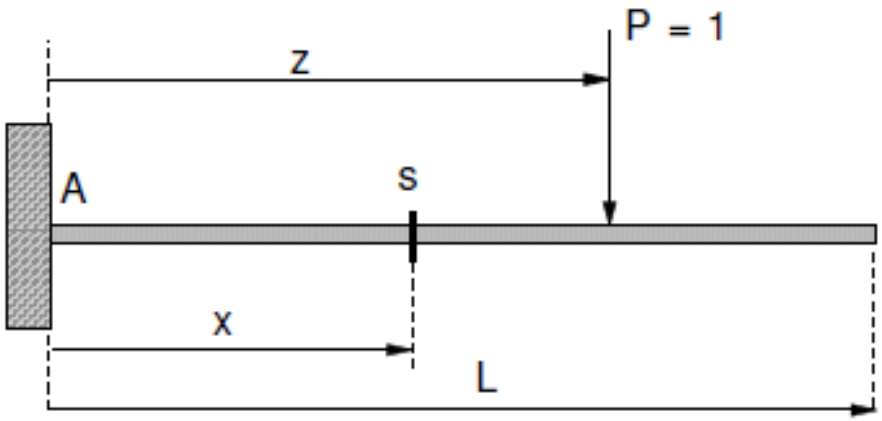
Observações:

► Os princípios estudados até aqui são válidos para estruturas isostáticas e hiperestáticas.

► É fácil verificar que as unidades das linhas de influência de ***momentos fletores*** são ***unidades de comprimento***, e que as linhas de influência de ***esforços cortantes, normais*** e ***reações de apoio*** são ***adimensionais***.

VIGAS

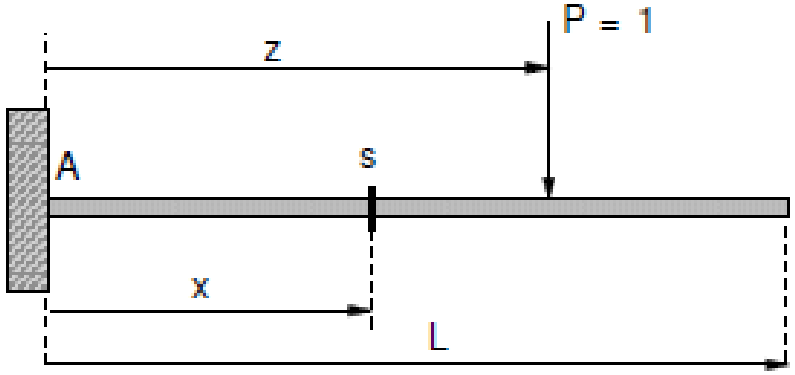
a. Viga Engastada-livre



Efeitos Elásticos

- Reações de apoio
- Esforços simples

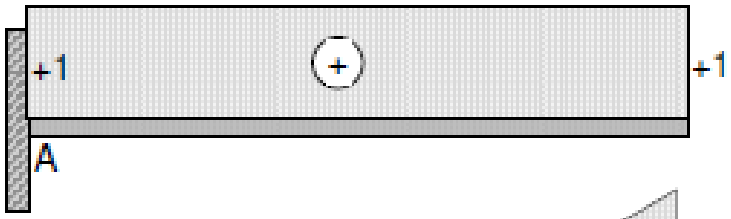
Reações de Apoio



Representação Analítica

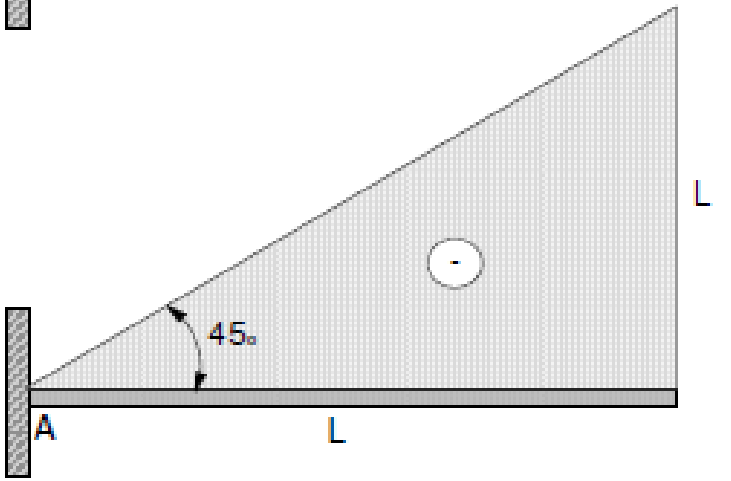
Representação gráfica

$R_A = +1$



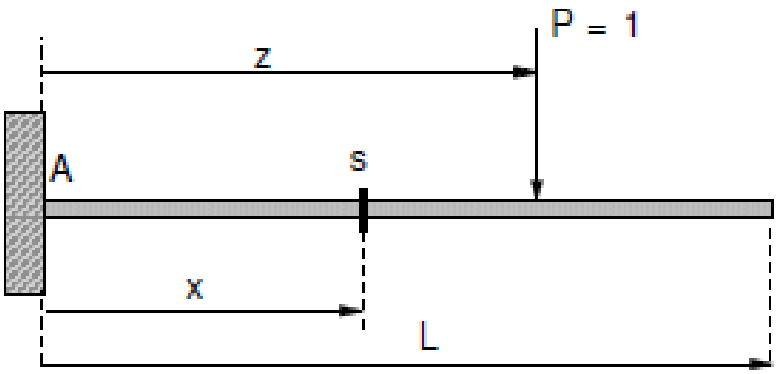
LIR_A

$M_A = -z$



LIM_A

Esforços Simples

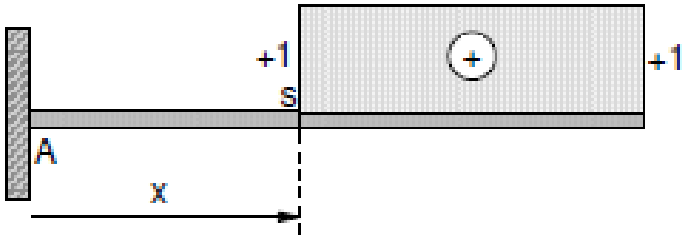


Representação Analítica

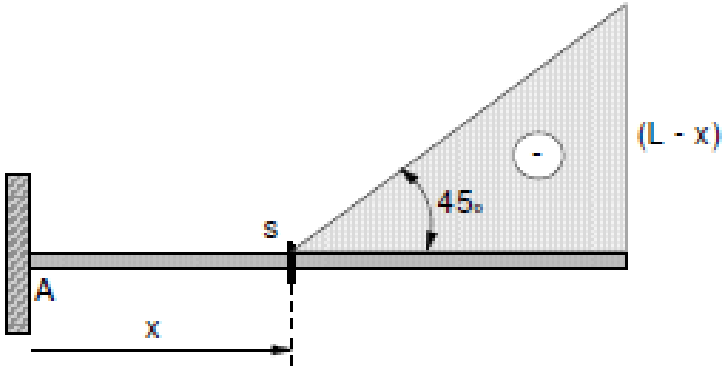
$$V_s = \begin{cases} 0, \text{ para } z < x \\ +1, \text{para } z > x \end{cases}$$

$$M_s = \begin{cases} 0, \text{ para } z \leq x \\ -(z - x), \text{ para } z > x \end{cases}$$

Representação gráfica

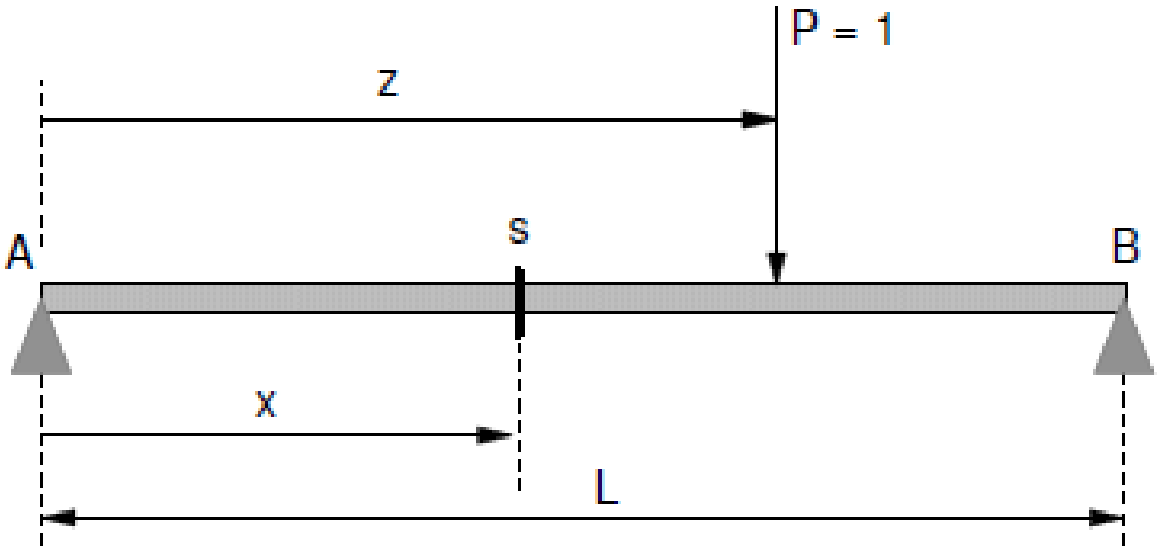


LIV_S



LIM_S

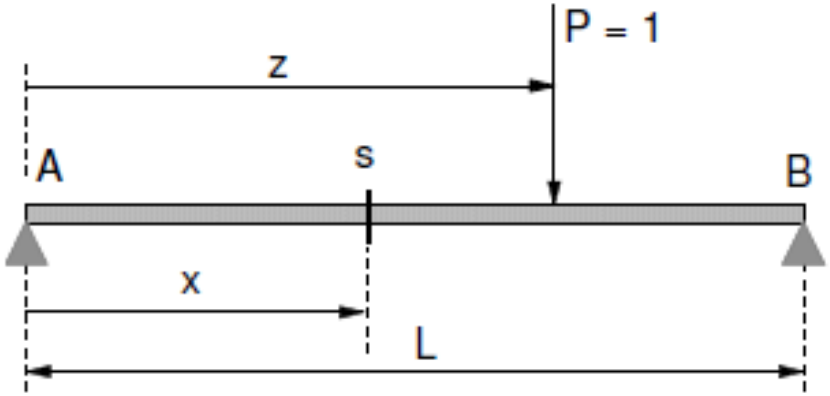
Viga Simplesmente Apoiada



Efeitos Elásticos

- Reações de apoio
- Esforços simples

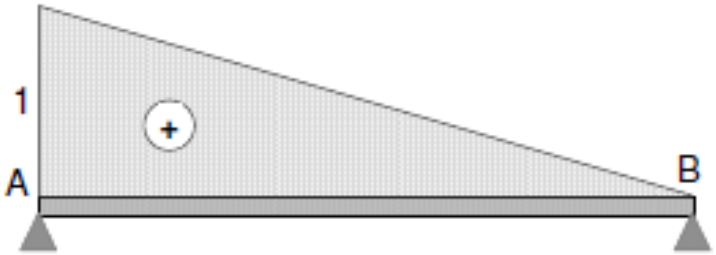
Reações de Apoio



Representação Analítica

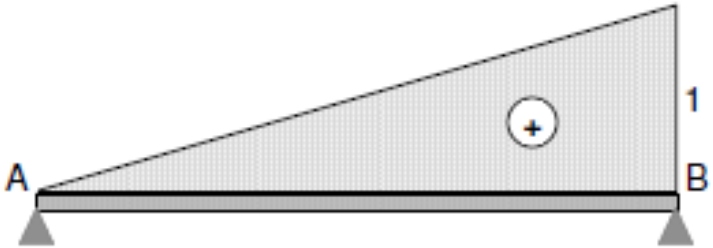
Representação gráfica

$R_A = + (L - z)/L$



LIR_A

$R_B = z/L$



LIR_B

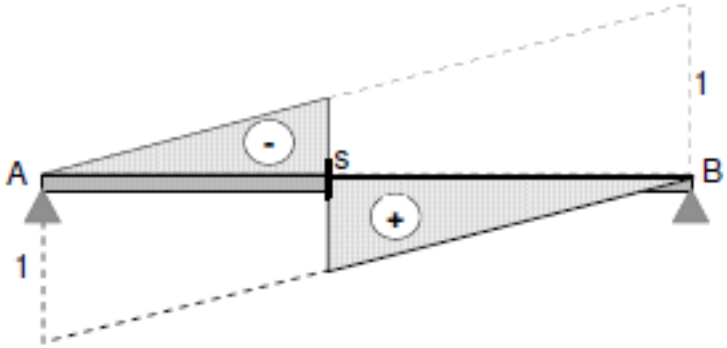
Esforços Simples

Representação Analítica

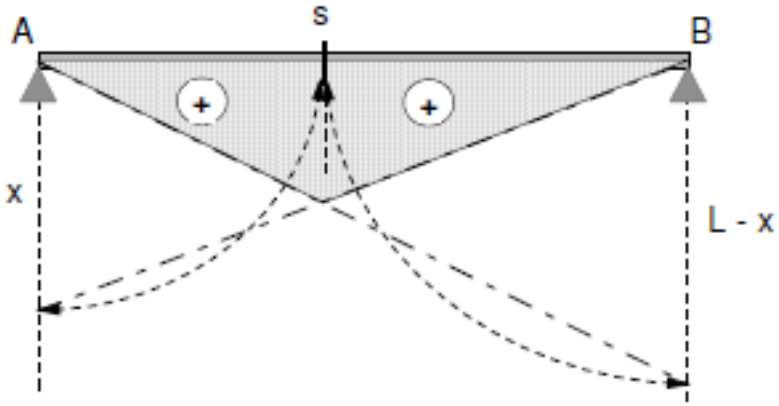
$$V_s = \begin{cases} -z/L \ (= -R_B), & \text{para } z < x \\ -+ (L - z)/L \ (= R_A), & \text{para } z > x \end{cases}$$

$$M_s = \begin{cases} z/L \ (L - x), & \text{para } z \leq x \\ (L - z)\, x/L, & \text{para } z > x \end{cases}$$

Representação gráfica



LIV_S



LIM_S

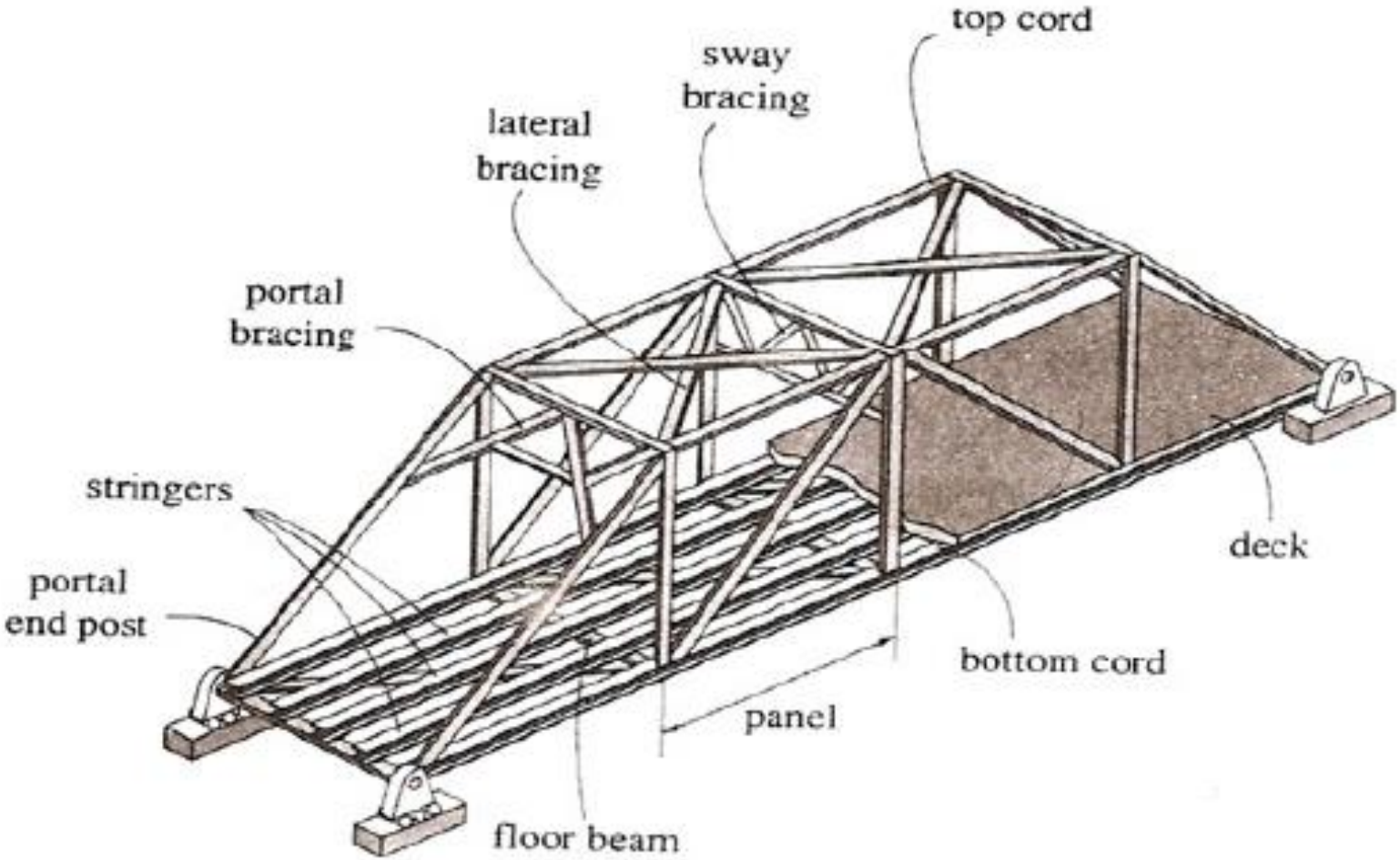
Observações:

- No estudo das L.I. de esforços simples, devemos sempre examinar separadamente as possibilidades da carga unitária estar à **esquerda** ou à **direita** da seção em estudo.

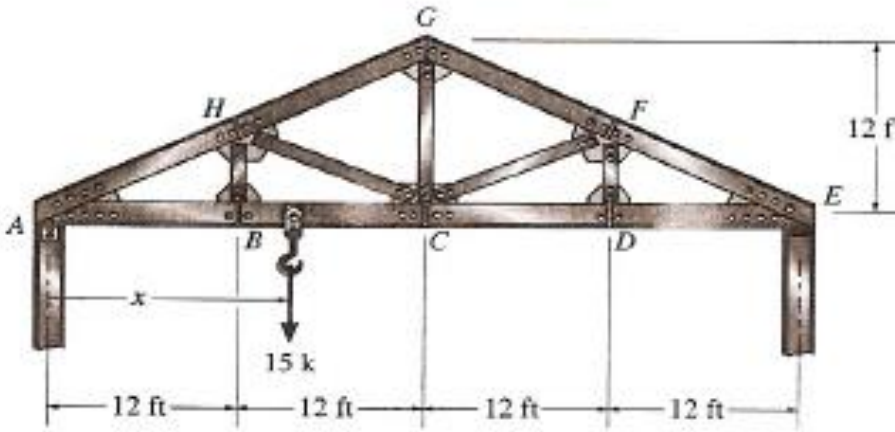
- A L.I. de **esforço cortante** numa seção apresenta sempre uma **descontinuidade igual a 1** nessa seção, conforme verificado nos casos já analisados.

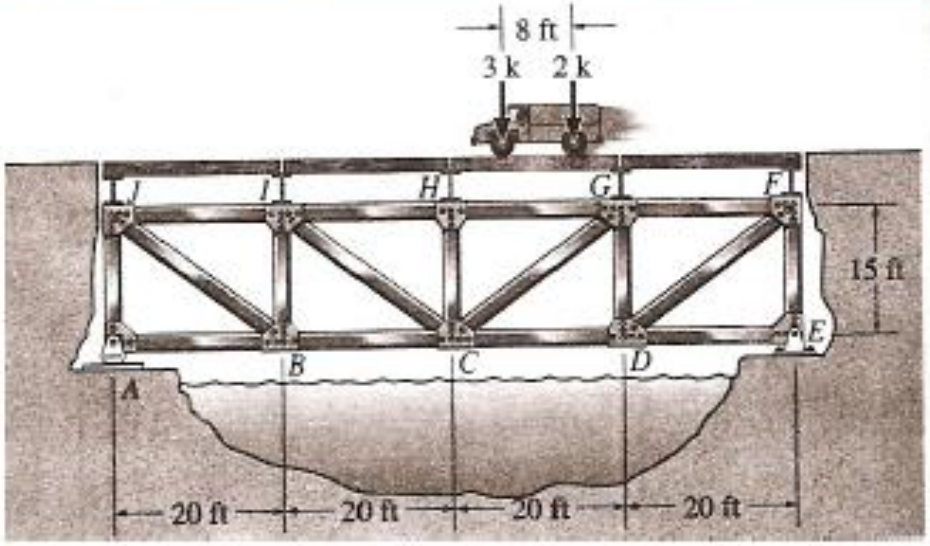
TRELIÇAS

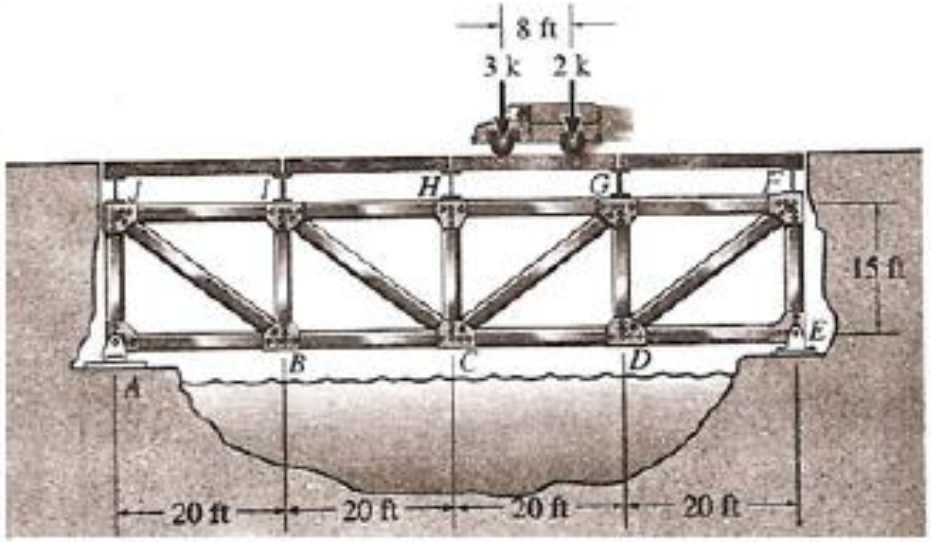
Pontes rodoviárias e ferroviárias



Pontes rodoviárias e ferroviárias; pontes rolantes

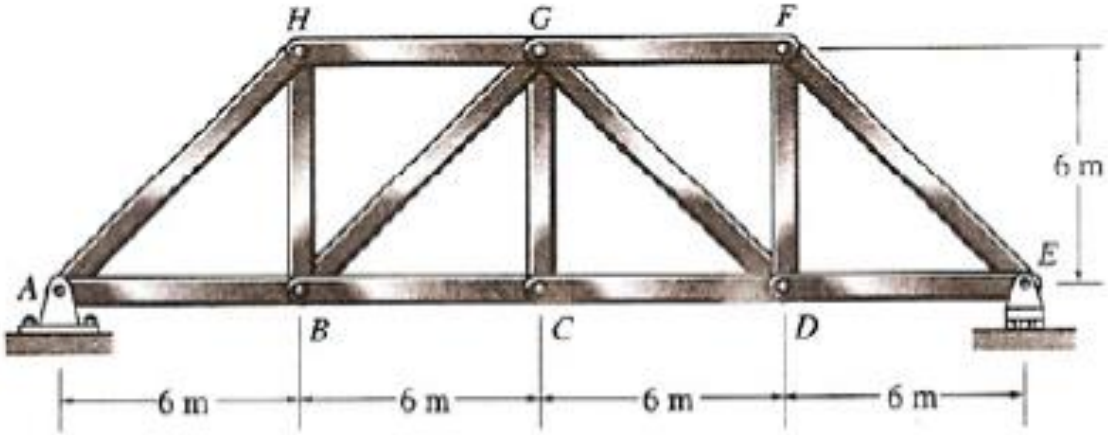




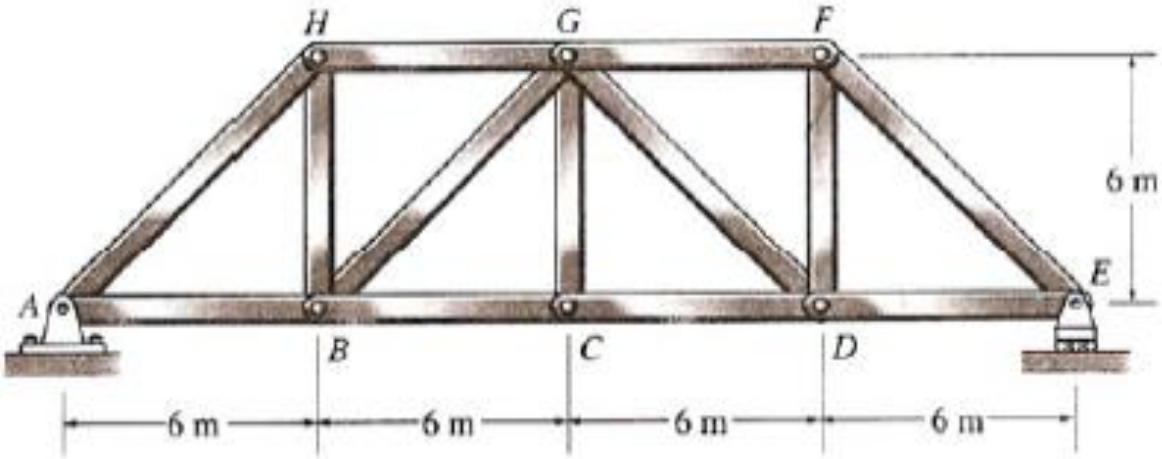


Aplicações:

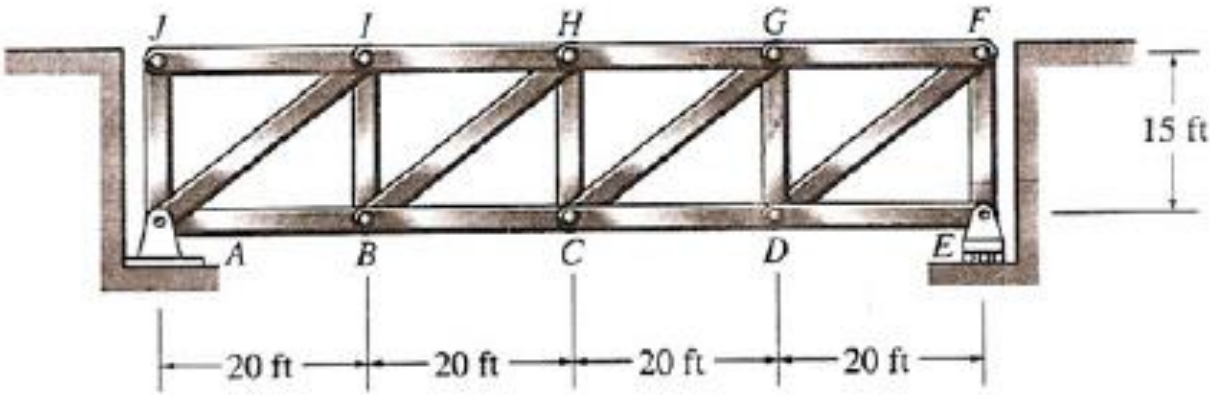
1. Obtenha a linha de influência do esforço normal na **barra GB** da ponte treliçada mostrada na figura a seguir.



2. Obtenha a linha de influência do esforço normal na **barra GC** da ponte treliçada mostrada na figura abaixo.



3. Determine o máximo esforço normal que pode ser desenvolvido na **barra BC** da ponte treliçada mostrada a seguir, devido a uma carga acidental concentrada de 20 k e uma acidental uniformemente distribuída de 0,6 k/ft.



DESLOCAMENTOS EM ESTRUTURAS

1. INTRODUÇÃO

a. Possíveis causas dos deslocamentos (flechas e rotações) nas estruturas:

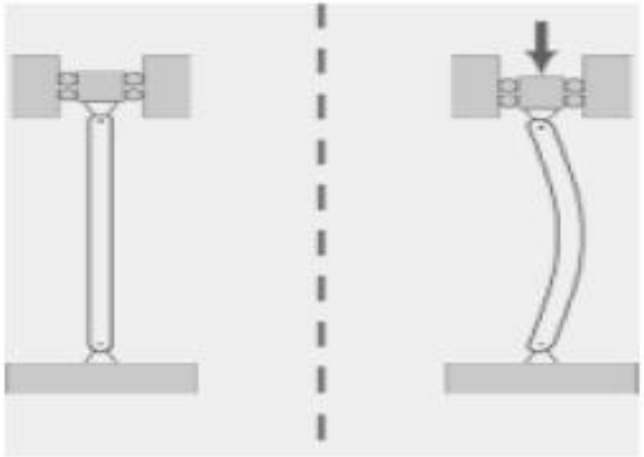
- ✓ Cargas
- ✓ Temperatura
- ✓ Erros de fabricação
- ✓ Erros de montagem

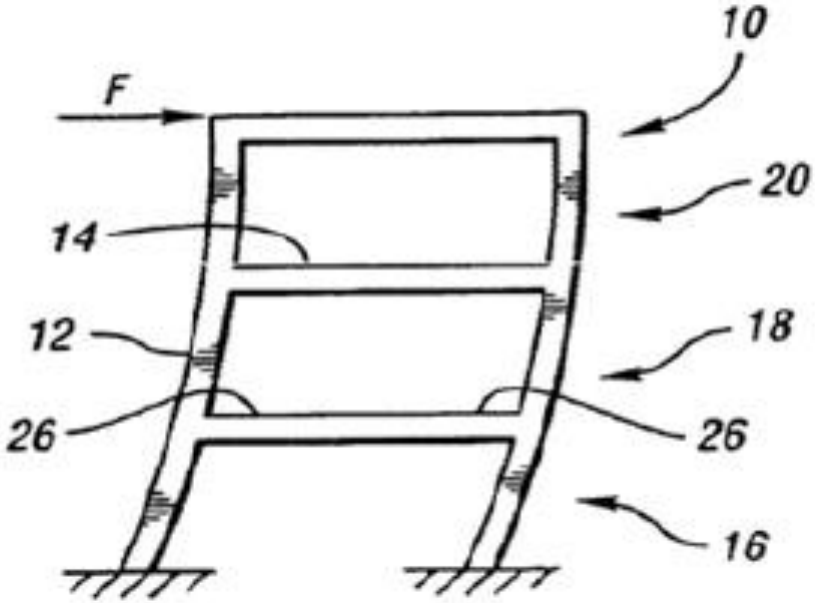
b. Importância da avaliação dos deslocamentos nas estruturas:

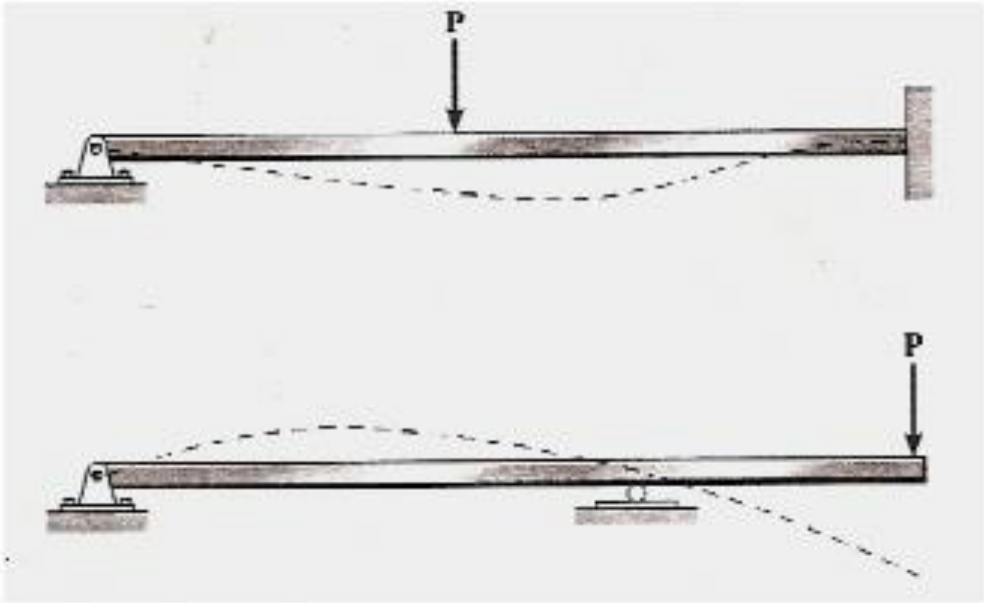
- ✓ Projeto: os deslocamentos devem ser pequenos no sentido de se evitar fissuras e fraturas (concreto, plástico, madeira, etc).
- ✓ Conforto: pequenas vibrações e deflexões.
- ✓ Método das Forças: estruturas estaticamente indeterminadas (fundamentos baseados no método do trabalho virtual – método da carga unitária).

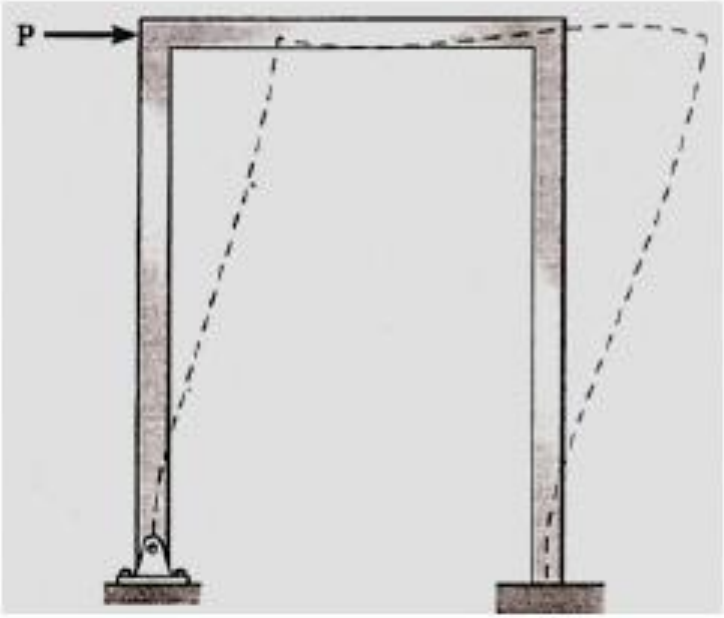
2. CAUSAS

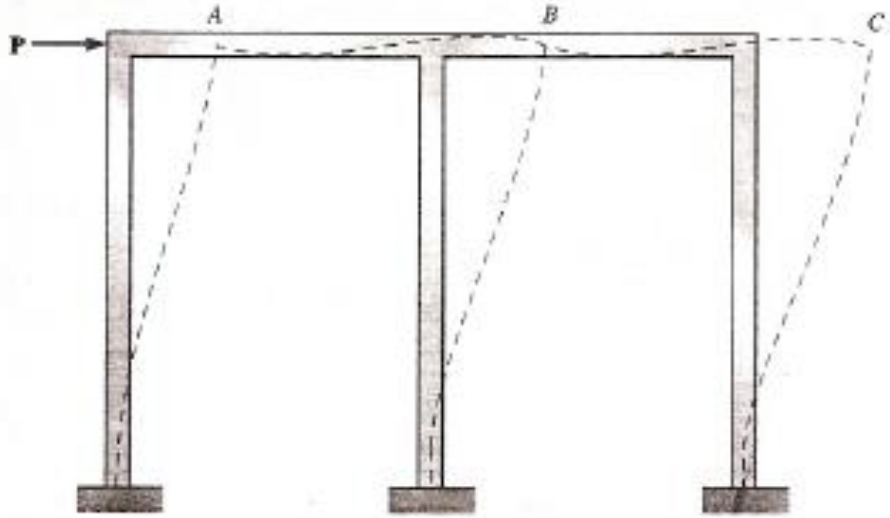
a. Carregamento: peso próprio + sobrecarga + acidental

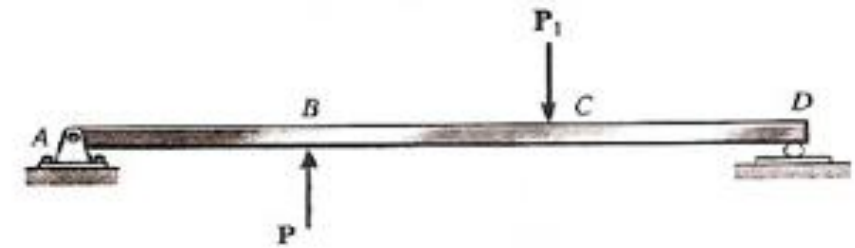



10
F
20
14
12
18
26
26
16

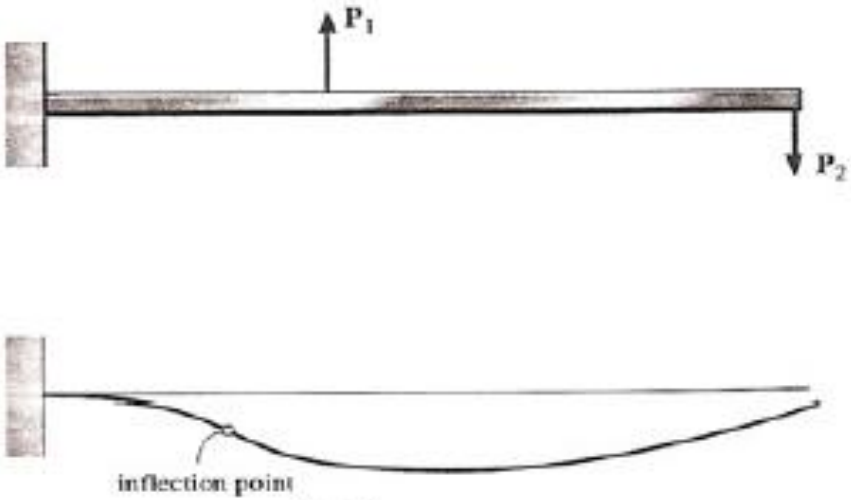

P
P


P



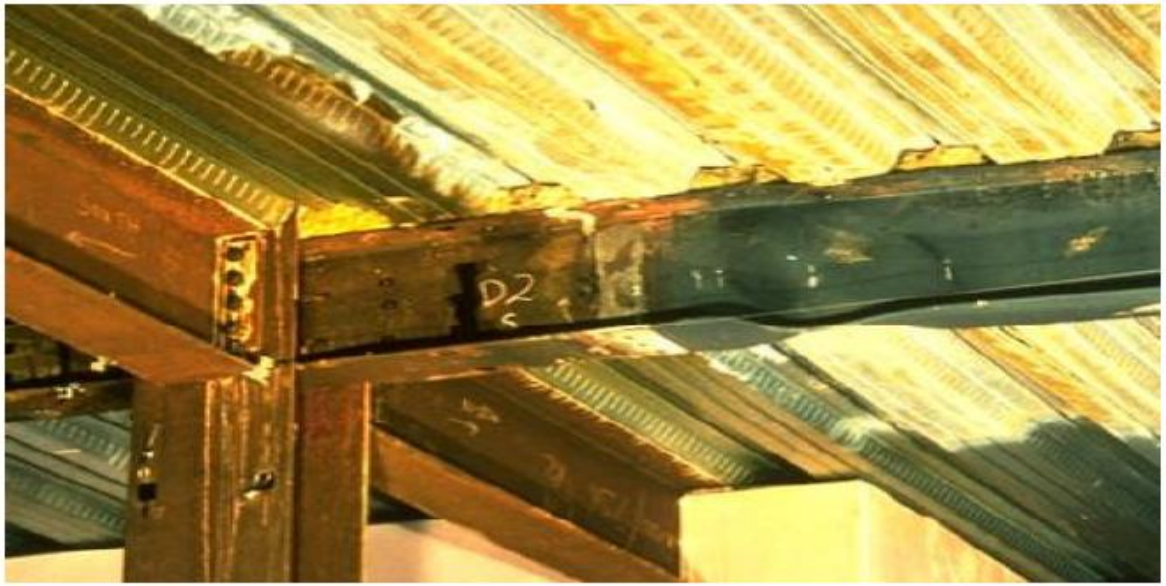


deflection curve



deflection curve

Temperatura



3. MÉTODOS DE ANÁLISE

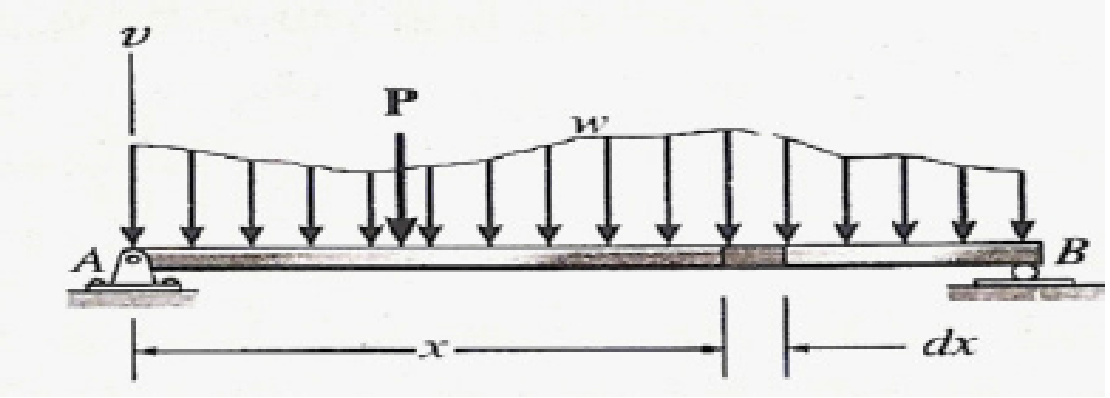
1. Método da Integração-Dupla
2. Método da Viga-Conjugada
3. Método do Trabalho Virtual (Método da Carga Unitária)

3.1. Método da Integração-Dupla

a. Equações Básicas

Hipóteses:

- Euler-Bernoulli
- Lei de Hooke
- Pequenos deslocamentos e rotações



Tem-se:

$$d\theta = \frac{M}{EI}dx \qquad (1)$$

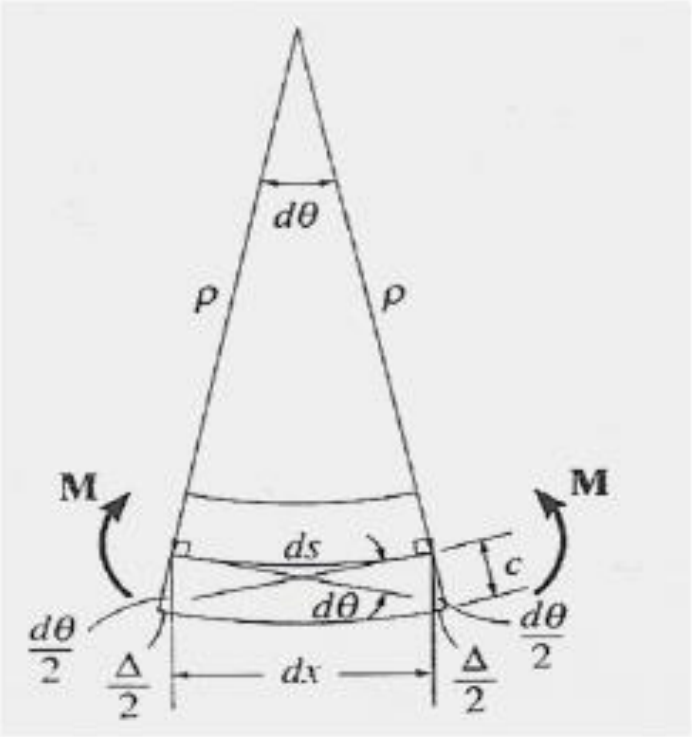
sendo M o momento atuante na seção, E o módulo de elasticidade do material e I o momento de inércia da seção.

Mas, $d\theta = \frac{dx}{\rho}$

Então:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \therefore \frac{1}{\rho} = \frac{d^2v/dx^2}{\left[1+(dv/dx)^2\right]^{3/2}} \qquad (2)$$

onde v é a deflexão da viga.

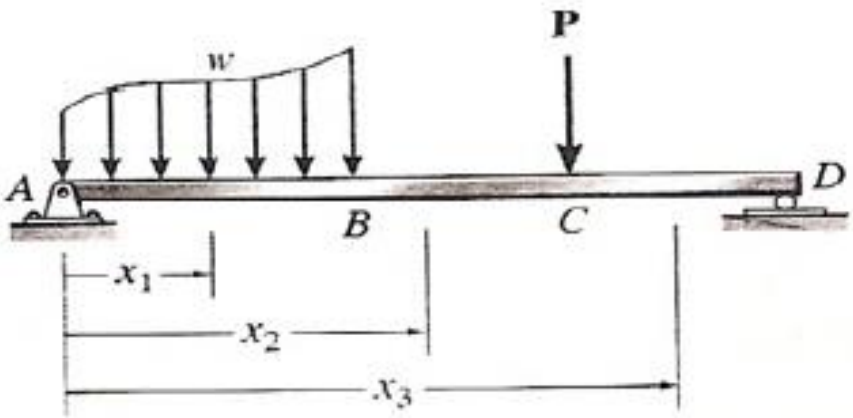


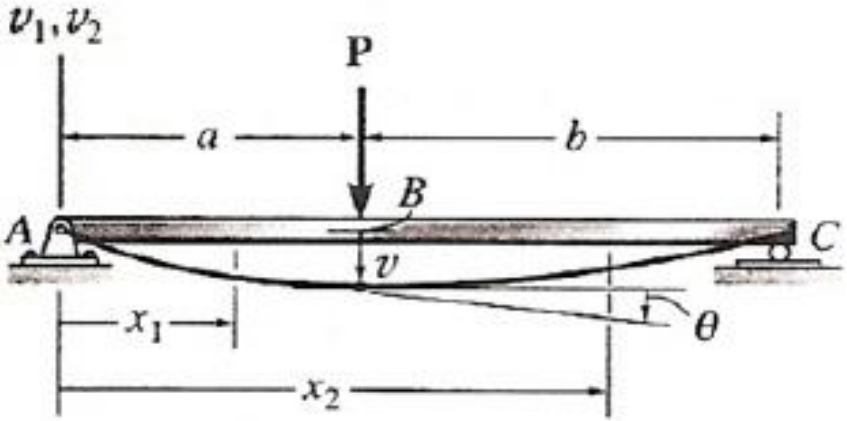
$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2v/dx^2}{\left[1+(dv/dx)^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M \qquad (3)$$

Condições de contorno e continuidade *Atenção !!!*





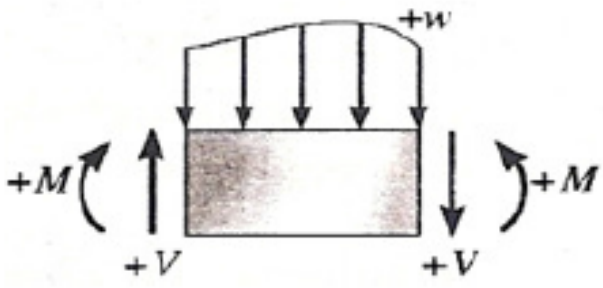
b. **Procedimento de Análise**

1. Curva Elástica

- ✓ Desenhe a configuração deformada da viga (forma exagerada).
- ✓ Estabeleça as coordenadas x e v.
- ✓ O(s) sistema(s) x(x´s) deve(m) ser paralelo(s) à viga indeformada.
- ✓ No caso de cargas descontínuas, estabeleça coordenadas x´s válidas em cada região da viga entre as descontinuidades.
- ✓ O eixo positivo da deflexão v normalmente é direcionado para cima.

2. Avaliação da Função Momento

- ✓ Em cada região que existe uma coordenada x, defina a expressão do momento M como uma função de x.
- ✓ Sempre assuma que M atua na direção positiva quando aplicar a equação de equilíbrio do momento.

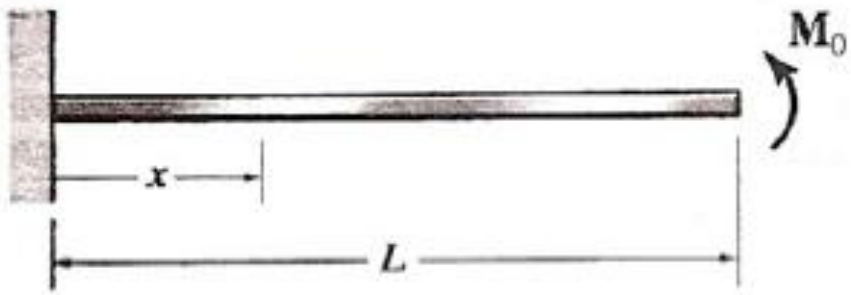


3. Deflexão e Rotação

- ✓ Aplique a equação $EI\, d^2v/dx^2 = M(x)$, que requer duas integrações.
- ✓ Para cada integração inclua uma constante de integração.
- ✓ Essas constantes são avaliadas através das condições de bordo e continuidade.

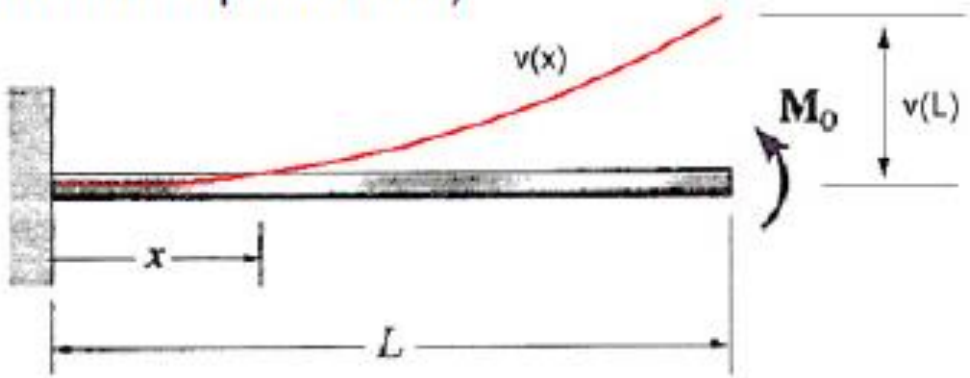
c. **Aplicações**

Problema 1: Para a viga mostrada abaixo, submetida a um momento M_0 na sua extremidade, obtenha a curva elástica.

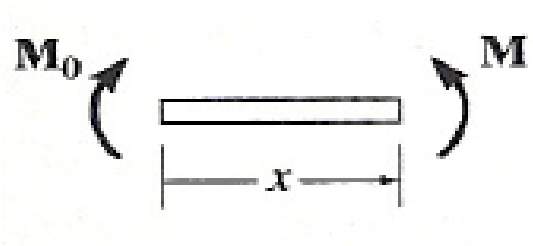


Solução:

i. Curva elástica (desenho aproximado)



ii. Avaliação da função momento (diagrama de corpo livre)



$$\Rightarrow \quad M = M_0$$

iii. Deflexão e rotação

Aplique a equação $EI\, d^2v/dx^2 = M(x)$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M_0 \therefore EI\frac{dv}{dx} = M_0x + C_1 \therefore EIv = \frac{M_0x^2}{2} + C_1x + C_2$$

Condições de contorno:

$$x = 0:\ dv/dx = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

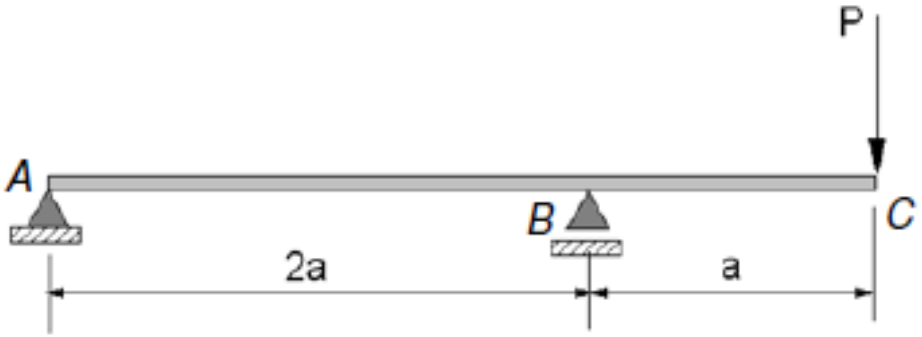
$$x = 0:\ v = 0 \qquad \rightarrow C_2 = 0$$

Ou seja:

$$\theta = \frac{M_0 x}{EI}$$

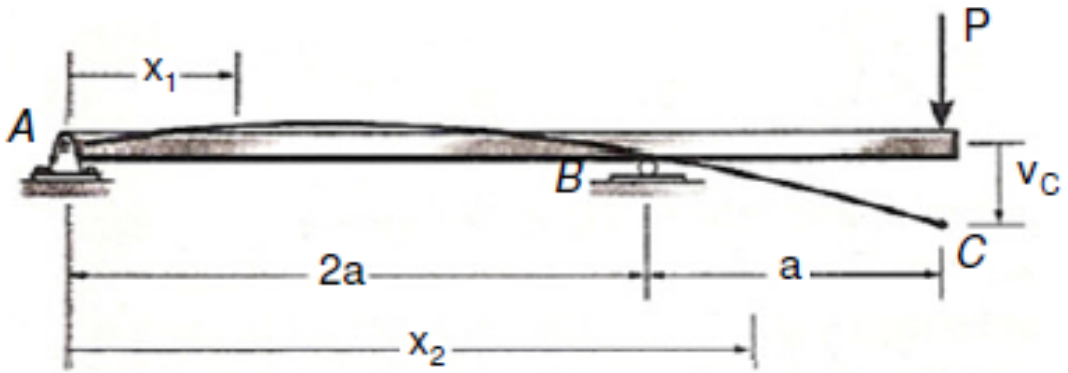
$$v = \frac{M_0 x^2}{2EI}$$

Problema 2: Para a viga mostrada a seguir, pede-se avaliar o deslocamento vertical do ponto C.



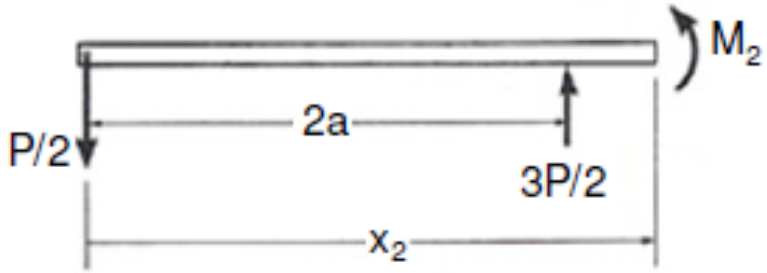
Solução:

i. Curva elástica (desenho aproximado) e definição do sistema de coordenadas



ii. Avaliação da função momento (diagrama de corpo livre)

Trecho x_1: $M_1 = -\frac{P}{2}x_1$



Trecho x_2:

$$M_2 = -\frac{P}{2}x_2 + \frac{3P}{2}(x_2 - 2a) = Px_2 - 3Pa$$

iii. Deflexão e Rotação

Aplique a equação $EI\, d^2v/dx^2 = M(x)$

Trecho x_1:

$$EI\frac{d^2v_1}{dx_1^{\,2}} = -\frac{P}{2}x_1 \therefore EI\frac{dv_1}{dx_1} = -\frac{P}{4}x_1^{\,2} + C_1 \therefore EIv_1 = -\frac{P}{12}x_1^{\,3} + C_1x + C_2$$

Trecho x_2:

$$EI\frac{d^2v_2}{dx_2^{\,2}} = Px_2 - 3Pa \therefore EI\frac{dv_2}{dx_2} = \frac{P}{2}x_2^{\,2} - 3Pax_2 + C_3$$

$$EIv_2 = \frac{P}{6}x_2^{\,3} - \frac{3}{2}Pax_2^{\,2} + C_3x_2 + C_4$$

Condições de contorno:

$$\text{Em } x_1 = 0,\ v_1 = 0 \quad \therefore \quad 0 = 0 + 0 + C_2$$

$$\text{Em } x_1 = 2a,\ v_1 = 0 \quad \therefore \quad 0 = -\frac{P}{12}(2a)^3 + C_1(2a) + C_2$$

$$\text{Em } x_2 = 2a,\ v_2 = 0 \quad \therefore \quad 0 = \frac{P}{6}(2a)^3 - \frac{3}{2}Pa(2a)^2 + C_3(2a) + C_4$$

$$\frac{dv_1(2a)}{dx_1} = \frac{dv_2(2a)}{dx_2} \quad \therefore \quad -\frac{P}{4}(2a)^2 + C_1 = \frac{P}{2}(2a)^2 - 3Pa(2a) + C_3$$

Solução do sistema:

$$C_1 = \frac{1}{3}Pa^2;\ C_2 = 0;\ C_3 = \frac{10}{3}Pa^2 \text{ e } C_4 = -2Pa^3$$

Para o trecho x_2 (v_2):

$$v_2 = \frac{P}{6EI} x_2^{\,3} - \frac{3}{2}\frac{Pa}{EI} x_2^{\,2} + \frac{10}{3}\frac{Pa^2}{EI} x_2 - 2\frac{Pa^3}{EI}$$

Finalmente, fazendo $x_2 = 3a$:

$$v_C = -\frac{Pa^3}{EI}$$

3.2. Método da Viga-Conjugada

a. Considerações Iniciais

- Idealizado por Otto Mohr em 1860
- Base do método: princípios da estática

- Base do método: similaridade entre as equações

1. Esforço Cortante <=> Rotação

$$\frac{dV}{dx} = -w$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$$

2. Momento Fletor <=> Deslocamento

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -w$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

- Integrando...

1. Esforço Cortante <=> Rotação

$$V = -\int w dx$$

$$\theta = -\int \left(\frac{M}{EI}\right) dx$$

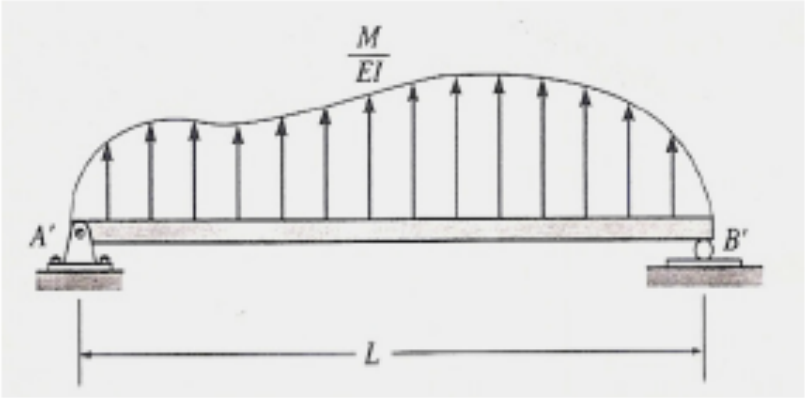
2. Momento Fletor <=> Deslocamento

$$M = \int \left[-\int w dx \right] dx$$

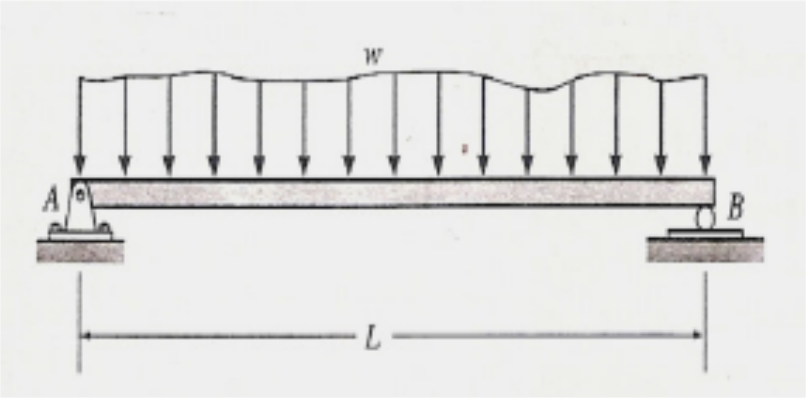
$$y = \int \left[\int \frac{M}{EI} dx \right] dx$$

b. **Viga Conjugada**

Viga Real



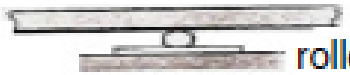
Viga-Conjugada

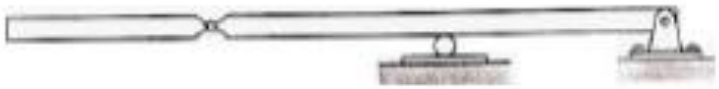


Teorema 1: A ***inclinação*** de um ponto na *viga real* é igual ao ***esforço cortante*** no mesmo ponto da *viga-conjugada* correspondente.

Teorema 2: O ***deslocamento*** de um ponto na *viga real* é igual ao ***momento fletor*** no mesmo ponto da *viga-conjugada* correspondente.

c. Condições de apoio (viga conjugada)

Viga Real		Viga Conjugada	
θ $\Delta = 0$	pin	V M = 0	pin
θ $\Delta = 0$	roller	V M = 0	roller
$\theta = 0$ $\Delta = 0$	fixed	V = 0 M = 0	free
θ Δ	free	V M	fixed
θ $\Delta = 0$	internal pin	V M = 0	hinge
θ $\Delta = 0$	internal roller	V M = 0	hinge
θ Δ	hinge	V M	 roller

Viga Real	Viga Conjugada
	

d. **Procedimento de análise**

1. Viga-Conjugada

- ✓ Desenhe a viga-conjugada para a viga real.
- ✓ A viga-conjugada deve ter o mesmo comprimento da viga real.
- ✓ Se um apoio na viga real permite uma **inclinação**, o apoio correspondente na viga-conjugada deverá desenvolver um **esforço cortante**.
- ✓ Se um apoio na viga real permite um **deslocamento**, o apoio correspondente na viga-conjugada deverá desenvolver um **momento fletor**.
- ✓ A viga-conjugada é carregada com o diagrama M/EI da viga real.
- ✓ Esse carregamento é assumido ser distribuído sobre a viga conjugada e é direcionado para cima quando M/EI é positivo e é direcionado para baixo quando M/EI é negativo.

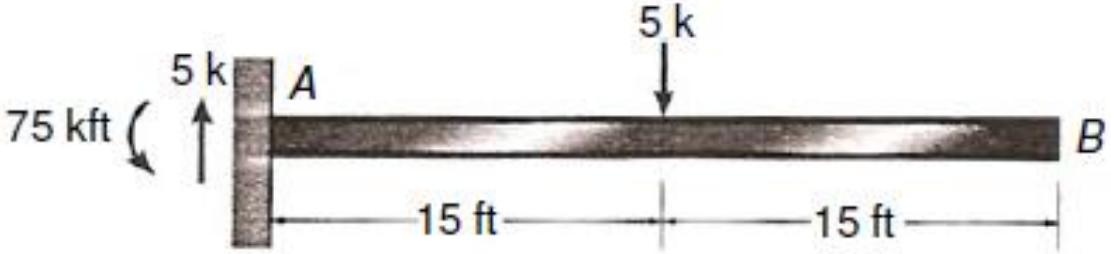
2. Equilíbrio

- ✓ Avalie as reações nos apoios da viga-conjugada.
- ✓ Usando as equações de equilíbrio, avalie o **esforço cortante (V')** ou o **momento fletor (M')** na viga conjugada onde a **inclinação (θ)** ou o **deslocamento (Δ)** deve ser determinado na viga real.
- ✓ Se esses valores são positivos, a **inclinação** acontece no sentido contrário ao do ponteiro do relógio e o **deslocamento** é para cima .

e. **Aplicações**

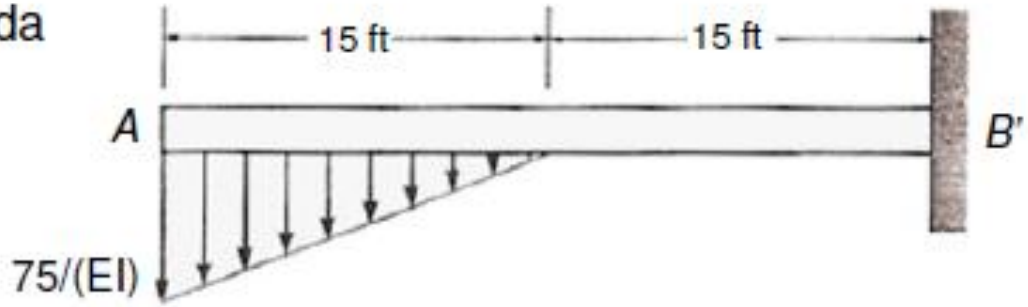
Problema 1. Determine a inclinação e o deslocamento no ponto B da viga metálica mostrada na figura abaixo. As reações já foram calculadas.

Assuma: E = 29 (10^3) ksi e I = 800 in^4.



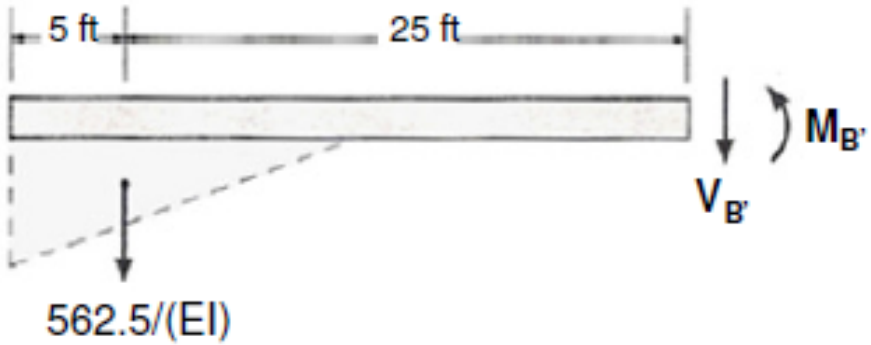
Solução:

i. Viga-Conjugada



ii. Equilíbrio da viga-conjugada

Diagrama de corpo-livre:



$$+\downarrow \sum F_y = 0 \therefore \frac{562.5\ k \cdot ft^2}{EI} + V_{B'} = 0$$

$$\theta_B = V_{B'} = -\frac{562.5\ k \cdot ft^2}{EI} = \frac{562.5\ k \cdot ft^2}{29(10^3)\ k/in^2 \cdot (144\ in^2/ft^2) \cdot 800\ in^4 \cdot (1\ ft^4/12^4 in^4)}$$

$$\theta_B = V_{B'} = -0.00349\ rad$$

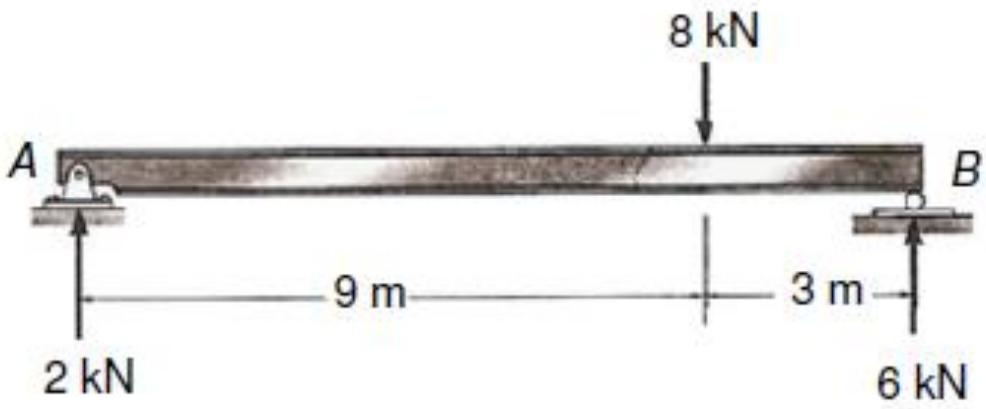
$$\circlearrowleft + \sum M_{B'} = 0 \therefore \frac{562.5\ \text{k}\cdot\text{ft}^2}{EI}(25\ \text{ft}) + M_{B'} = 0$$

$$\Delta_B = M_{B'} = -\frac{14062.5\ \text{k}\cdot\text{ft}^3}{EI} = \frac{14062.5\ \text{k}\cdot\text{ft}^3}{29(10^3)\ \text{k/in}^2\cdot(144\ \text{in}^2/\text{ft}^2)\cdot 800\ \text{in}^4\cdot(1\ \text{ft}^4/12^4\text{in}^4)}$$

$$\Delta_B = M_{B'} = -0.0876\ \text{ft} = -1.05\ \text{in}$$

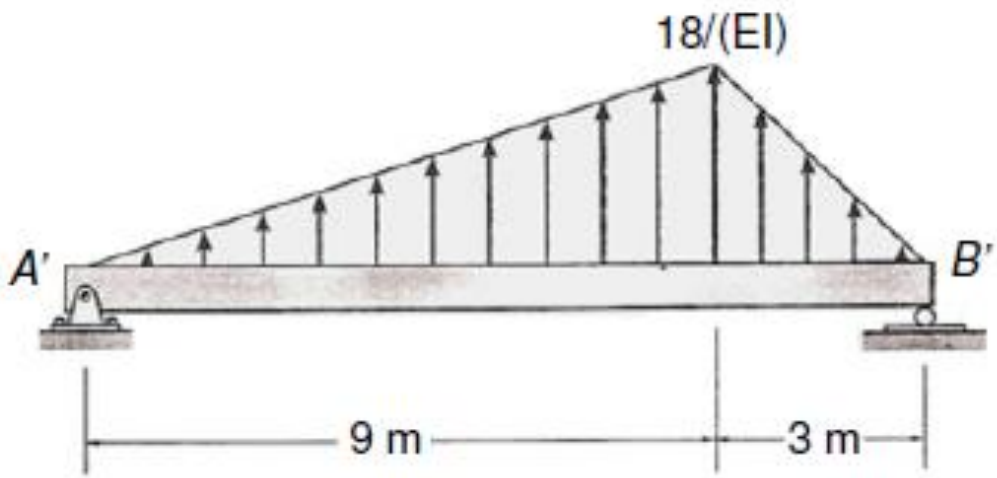
Problema 2: Determine a deflexão máxima da viga metálica mostrada na figura abaixo. As reações já foram calculadas.

Assuma: E = 200 GPa e I = 60 (10^6) mm^4.



Solução:

i. Viga-Conjugada



ii. Equilíbrio da viga-conjugada

Análise: A deflexão máxima da viga real ocorre no ponto onde a inclinação é nula. Portanto, nesse mesmo ponto, o esforço cortante é nulo na viga conjugada. Assim:

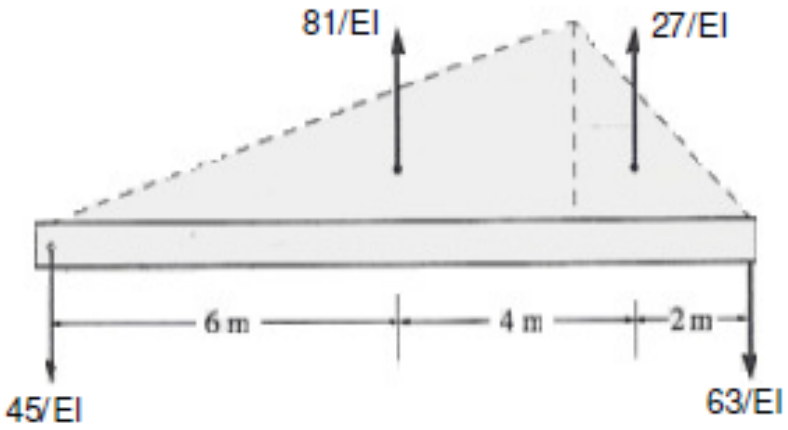
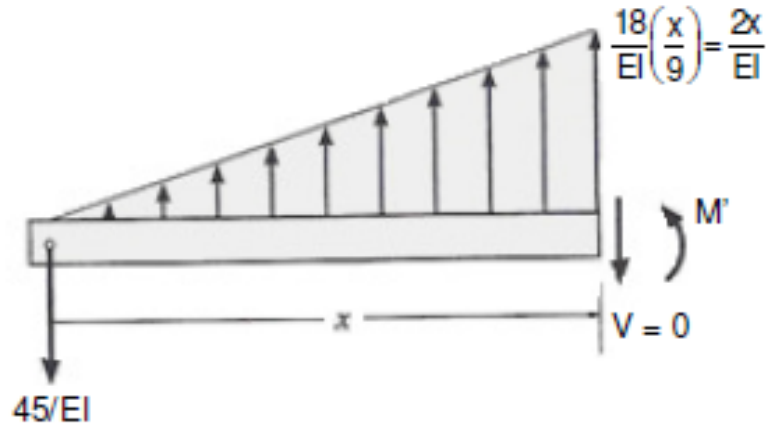


Diagrama de corpo-livre:



$$+\downarrow \sum F_y = 0 \therefore -\frac{45}{EI} + \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{EI}\right)x = 0 \therefore x = 6.71\text{ m} \quad (0 \le x < 9\text{ m}) \quad \text{OK}$$

Usando esse valor de x:

$$\circlearrowleft + \sum M = 0 \therefore -\frac{45}{EI}(6.71) + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2(6.71)}{EI}\right)6.71\right]\frac{1}{3}(6.71) - M' = 0$$

$$\Delta_{máx} = M' = -\frac{201.2\ kNm^3}{EI} = \frac{-201.2\ kNm^3}{\left[200(10^6)\ kN/m^2\right]\left[60(10^6)\ mm^4(1\ m^4/(10^3)^4\ mm^4\right]} =$$

$$= -0.0168\ m = -16.8\ mm$$

3.3. Método do Trabalho Virtual (Método da Carga Unitária)

a. **Considerações Iniciais**

- Métodos anteriores: eficientes para vigas submetidas a carregamentos simples.
- Métodos energéticos: eficientes para vigas, treliças e pórticos sujeitos a carregamentos quaisquer.
- Base dos métodos energéticos: Princípio da Conservação de Energia

$$U_e = U_i$$

onde:

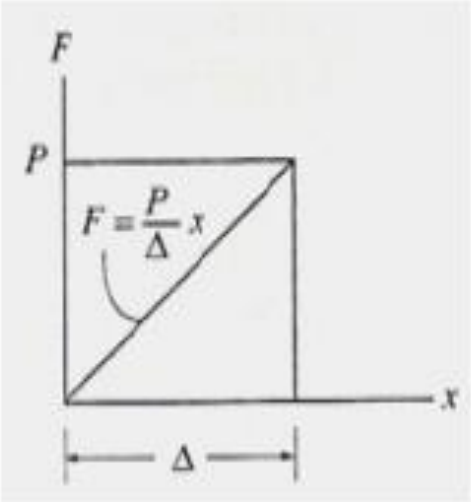
U_e : trabalho realizado pelas forças que atuam na estrutura.

U_i : trabalho interno (energia de deformação) armazenado quando a estrutura se deforma.

b. Fundamentos

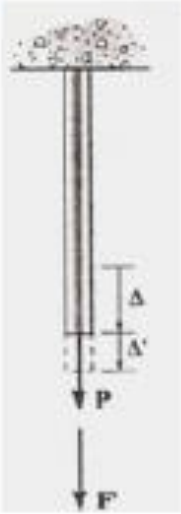
Trabalho Externo: Força P

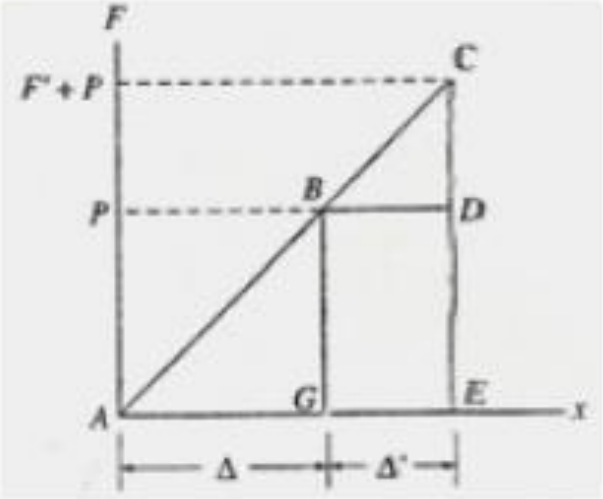
$$U_e = \frac{1}{2} P \Delta$$



Trabalho Externo: Força P (aplicada primeiro) + Força P'

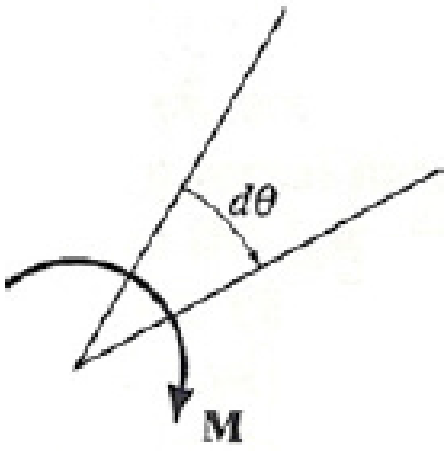
$$U_e = \frac{1}{2} P \Delta + P \Delta' + \frac{1}{2} F' \Delta'$$





Trabalho Externo: Momento M

$$U_e = \frac{1}{2} M\theta$$



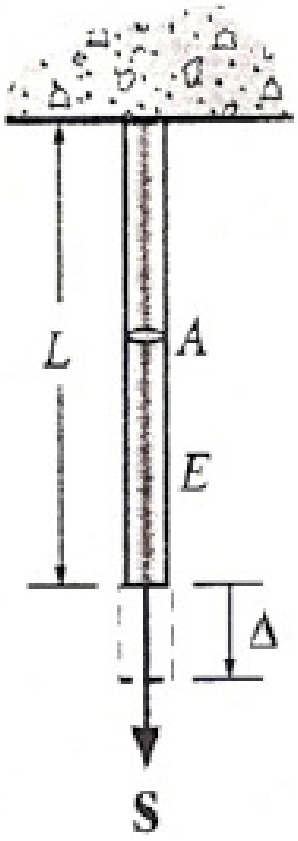
Trabalho Externo: Momento M (aplicado primeiro) + Momento M'

$$U_e = \frac{1}{2} M\theta + M\theta' + \frac{1}{2} M'\theta'$$

Trabalho Interno (Energia de Deformação): Força Axial S

Hipóteses:

- ✓ Material elástico linear
- ✓ Lei de Hooke: $\sigma = E\varepsilon$
- ✓ Deformação: $\varepsilon = \Delta/L$
- ✓ Tensão: $\sigma = S/A$



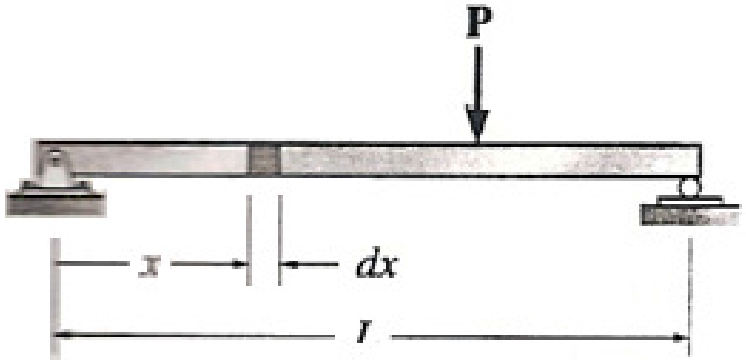
Deslocamento Δ: $\Delta = \dfrac{SL}{AE}$

Trabalho Interno: $U_i = \dfrac{1}{2} S\Delta = \dfrac{S^2 L}{2AE}$

Trabalho Interno (Energia de Deformação): Flexão (Momento Fletor M)

Rotação dθ (elemento diferencial):

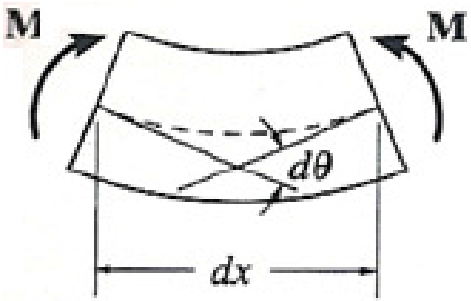
$$d\theta = \frac{M}{EI}\,dx$$



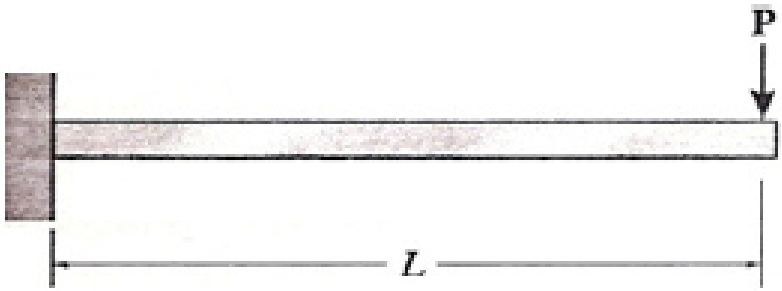
Trabalho Interno:

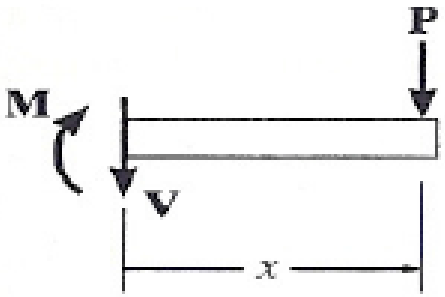
$$dU_i = \frac{1}{2} M d\theta$$

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx$$



c. Princípio da Conservação da Energia





Nesse caso:

$$U_e = \frac{1}{2} P \Delta$$

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\, dx = \int_0^L \frac{(-Px)^2}{2EI}\, dx = \frac{1}{6}\frac{P^2 L^3}{EI}$$

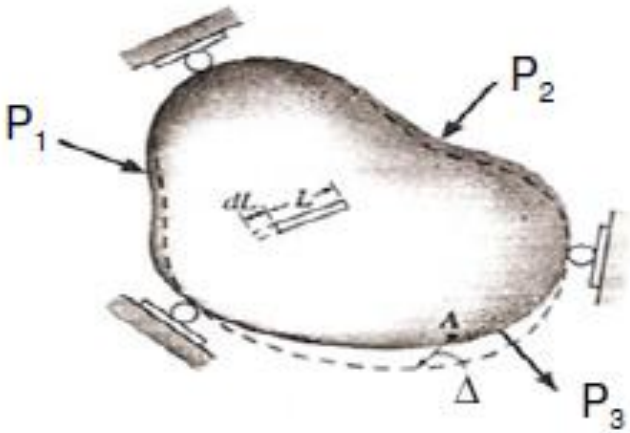
Como, $U_e = U_i$:

$$\frac{1}{2} P \Delta = \frac{1}{6}\frac{P^2 L^3}{EI} \therefore \Delta = \frac{1}{3}\frac{P L^3}{EI}$$

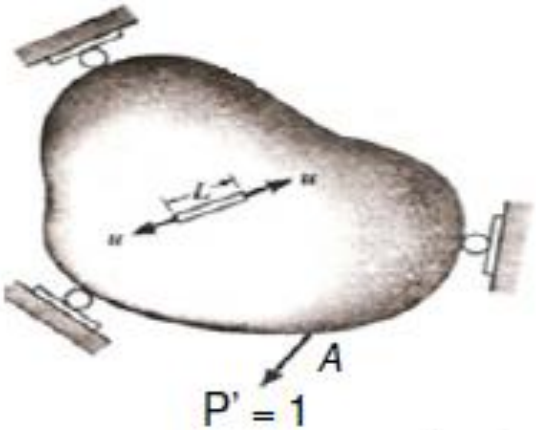
d. **Princípio do Trabalho Virtual (PTV)**

- Baseado no princípio da conservação de energia: $U_e = U_i$.
- Foi desenvolvido por John Bernoulli em 1717.
- Conhecido também como o Método da Carga Unitária.
- Considere uma estrutura deformável submetida a uma série de cargas **P** que irão causar o aparecimento de forças internas **u** ao longo de toda a estrutura. Essas forças estão relacionadas por *Equações de Equilíbrio*.
- Considere também que deslocamentos externos **Δ** irão acontecer nos locais de aplicação das cargas **P** e deslocamentos internos **δ** irão ocorrer nos locais da forças internas **u**. Esses deslocamentos não precisam ser elásticos, podem não ser relacionados com as cargas, e **Δ** e **δ** estão relacionados por *Equações de Compatibilidade*.
- Princípio do Trabalho Virtual (PTV): $\underset{\text{(TVCE)}}{\sum P\Delta} = \underset{\text{(TVCI)}}{\sum u\,\delta}$

Considere: Cargas reais P_1, P_2 e P_3 aplicadas na estrutura (deseja-se avaliar Δ)



Considere agora a carga virtual P' = 1 aplicada na direção de Δ



Princípio do Trabalho Virtual (PTV): $1 \times \Delta = \sum u \, dL$

(TVCE) (TVCI)

Se a rotação θ em um determinado ponto da estrutura é para ser determinada, um ***momento fletor virtual*** de magnitude unitária (M' = 1) é aplicado nesse ponto. Como conseqüência da aplicação de M' = 1 na estrutura, forças internas $\mathbf{u_\theta}$ aparecerão no sistema. Assim, o PTV pode ser escrito como:

Forças virtuais

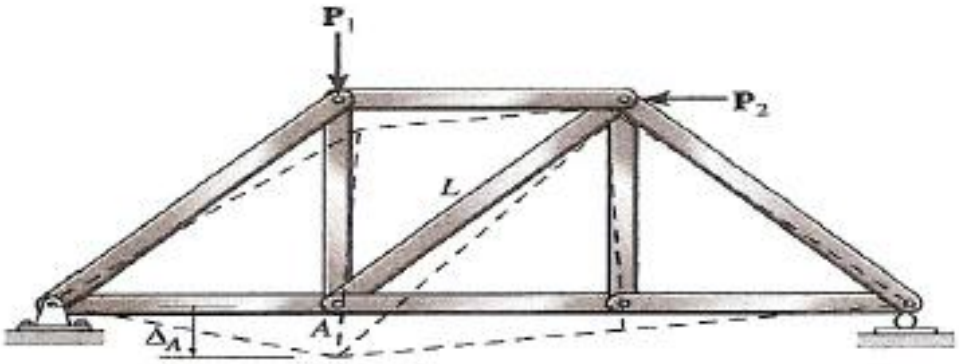
$$1 \times \theta = \sum u_\theta \, dL$$

Deslocamentos reais

4. TRELIÇA (Aplicação do Princípio do Trabalho Virtual)

a. **Efeito: Carregamento externo**

Expressão Geral: $1 \times \Delta = \sum n\, dL$



$$1 \times \Delta = \sum \frac{nNL}{AE}$$

onde:

1 = força virtual unitária aplicada na direção de Δ

n = forças normais virtuais atuantes nas barras causadas pela força unitária

Δ = deslocamento a ser avaliado causado pelas forças externas reais

N = forças normais reais atuantes nas barras causadas pelas forças externas reais

L = comprimento de uma barra

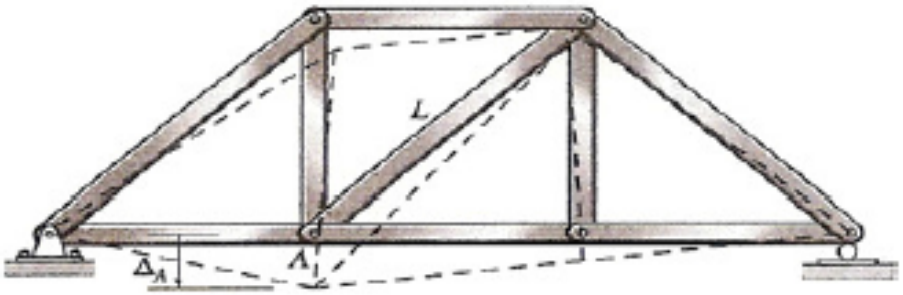
A = área da seção transversal de uma barra

E = módulo de elasticidade

b. **Efeito: Temperatura**

Expressão Geral: $1 \times \Delta = \sum n \, dL$

$$1 \times \Delta = \sum n \, \alpha \, \Delta T \, L$$



onde:

1 = força virtual unitária aplicada na direção de Δ

n = forças normais virtuais atuantes nas barras causadas pela força unitária

Δ = deslocamento a ser avaliado causado pela mudança de temperatura

α = coeficiente de dilatação térmica (depende do material)

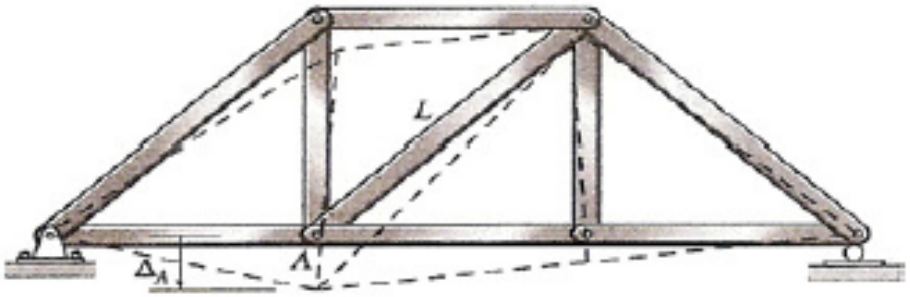
L = comprimento de uma barra

ΔT = variação de temperatura da barra

c. Efeito: Erros de fabricação e montagem

Expressão Geral: $1 \times \Delta = \sum n \, dL$

$$1 \times \Delta = \sum n \, \Delta L$$



onde:

1 = força virtual unitária aplicada na direção de Δ

n = forças normais virtuais atuantes nas barras causadas pela força unitária

Δ = deslocamento a ser avaliado causado pelo erro de fabricação e montagem

ΔL = diferença de comprimento da barra (comprimento projetado – comprimento observado após a montagem ou fabricação da peça)

d. **Procedimento de análise**

1. Forças Normais Virtuais n

   - Coloque a força unitária na junta e na direção do deslocamento que se deseja determinar.
   - Resolva a treliça para essa carga unitária atuante (método das juntas ou seções).
   - Assuma as forças normais de tração como positivas.

2. Forças Normais Reais N

   - Resolva a treliça para as forças externas reais atuantes (método das juntas ou seções).
   - Assuma as forças normais de tração como positivas.

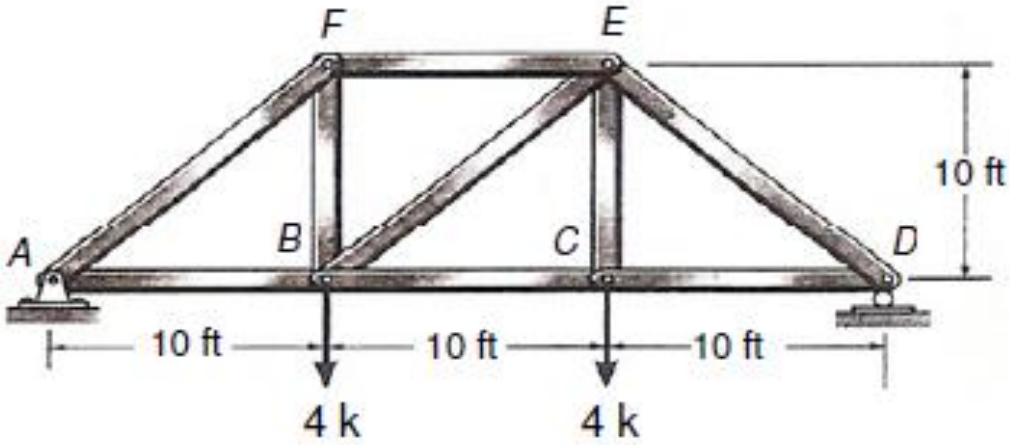
3. Equação do Trabalho Virtual

- Aplique a equação do trabalho virtual para determinar o deslocamento desejado.
- Mantenha o sinal de **u** e **N** obtidos nos passos anteriores.
- No caso de atuar simultaneamente forças externas, temperatura e erros de fabricação:

$$1 \times \Delta = \sum n \frac{NL}{AE} + \sum n \, \alpha \, \Delta T \, L + \sum n \, \Delta L$$

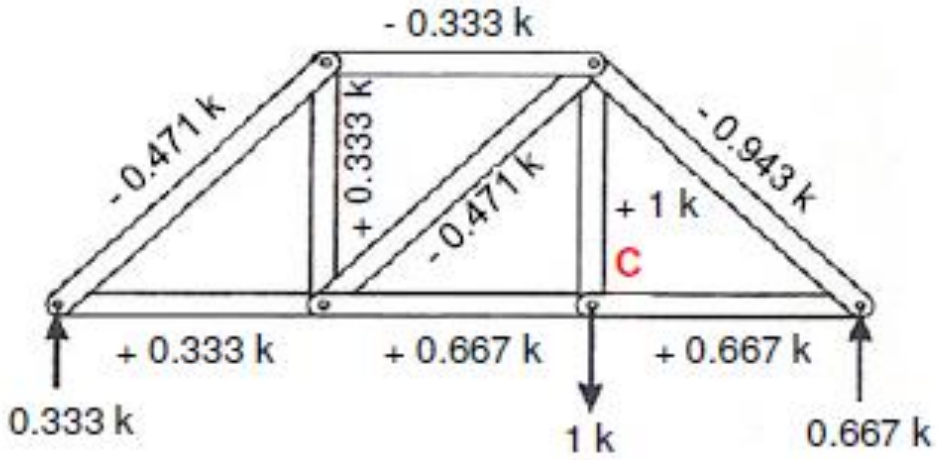
e. **Aplicações**

Problema 1: Determine o deslocamento vertical do ponto C da treliça metálica mostrada na figura abaixo. Considere: E = 29 (10^3) ksi e A = 0.5 in^2.

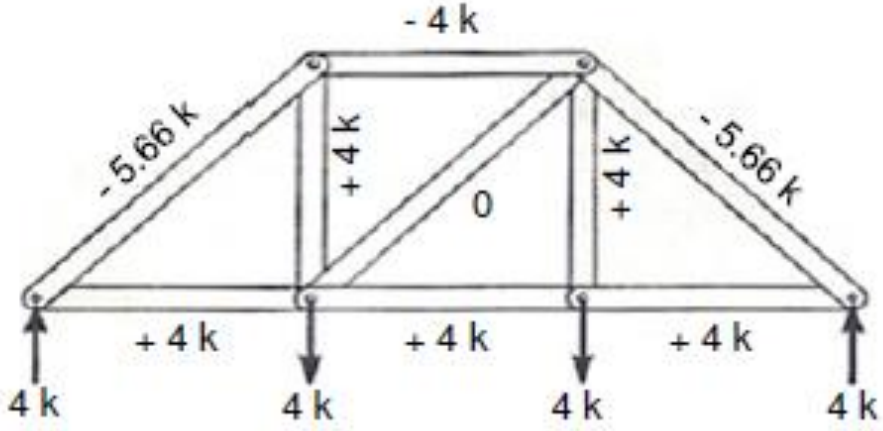


Solução:

i. Avaliação dos esforços normais virtuais **n** (P = 1 kN posicionada na junta C e na direção do deslocamento vertical procurado)



ii. Avaliação dos esforços normais reais **N** (forças externas reais atuantes)



iii. Aplicação da equação do PTV: $1 \times \Delta = \sum n \frac{NL}{AE}$

Membro	n (k)	N (k)	L (ft)	nNL (k^2.ft)
AB	0.333	4	10	13.33
BC	0.667	4	10	26.67
CD	0.667	4	10	26.67
DE	-0.943	-5.66	14.14	75.47
FE	-0.333	-4	10	13.33
EB	-0.471	0	14.14	0
BF	0.333	4	10	13.33
AF	-0.471	-5.66	14.14	37.70
CE	1.000	4	10	40
				$\sum$ 246.50

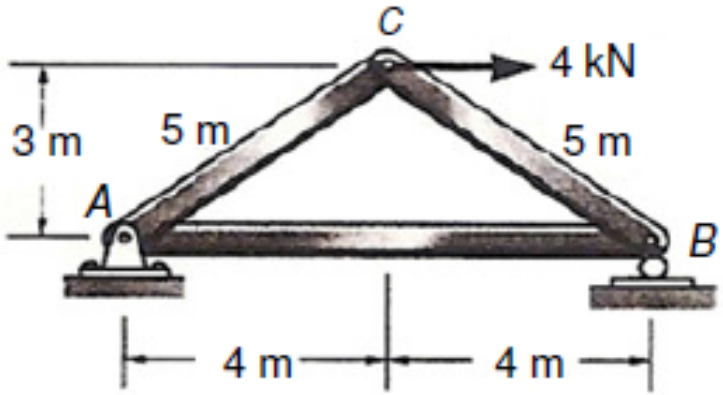
Assim:

$$1k \cdot \Delta_{C_v} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{246.50\ k^2 \cdot ft}{AE} = \frac{(246.50\ k^2 \cdot ft)(12\ in/ft)}{(0.5\ in^2)(29(10^3)\ k/in^2)} \qquad \therefore \Delta_{C_v} = 0.204\ in$$

Problema 2: Considere para a treliça mostrada abaixo, cada barra com E = 200 GPa e A = 400 mm². Pede-se:

a. O deslocamento vertical no ponto C se uma força horizontal de 4 kN for aplicada nesse mesmo ponto.

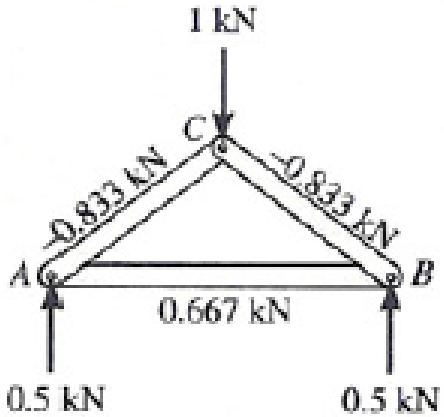
b. Se nenhuma carga for aplicada, qual seria o deslocamento vertical em C se a barra AB for 5 mm menor do que o tamanho definido em projeto?

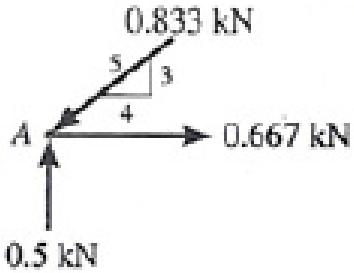


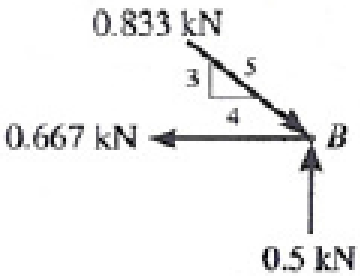
Solução:

a.

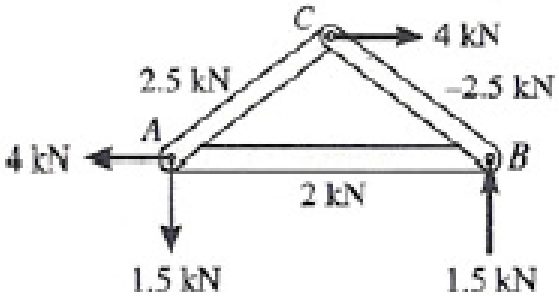
i. Avaliação dos esforços normais virtuais **n** (P = 1 posicionada na junta C e na direção do deslocamento vertical procurado).

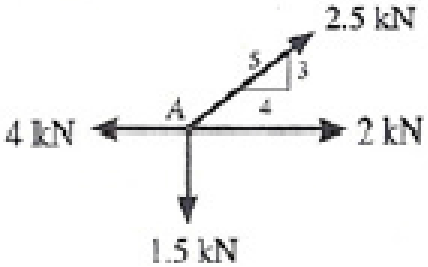


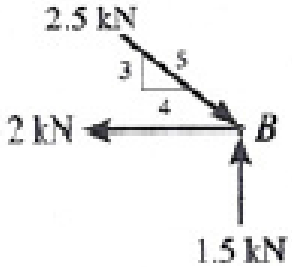




ii. Avaliação dos esforços normais reais **N** (forças externas reais atuantes).







iii. Aplicação da equação do PTV: $1 \times \Delta = \sum n \frac{NL}{AE}$

Membro	n (k)	N (k)	L (ft)	nNL (k^2.ft)
AB	0.667	2	8	10.67
AC	-0.833	2.5	5	-10.41
CB	-0.833	-2.5	5	10.41
				$\sum$ 10.67

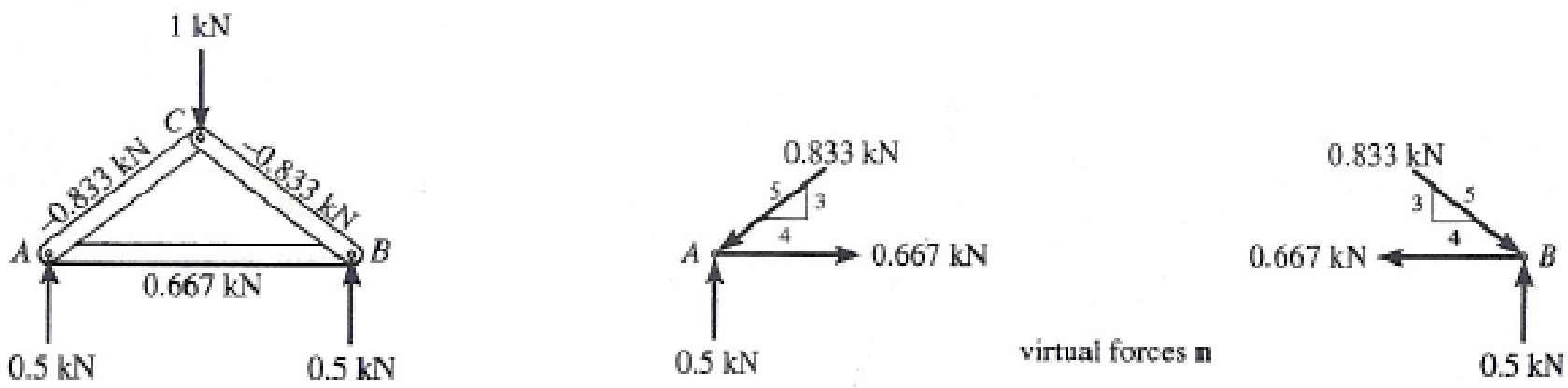
Assim:

$$1kN \cdot \Delta_{C_v} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{10.67\ kN^2 \cdot m}{AE} = \frac{(10.67\ kN^2 \cdot m)}{400(10^{-6})\ m^2 (200(10^6)\ kN/m^2)}$$

$$\Delta_{C_v} = 0.133\ mm$$

b.

i. Avaliação dos esforços normais virtuais **n** (P = 1 posicionada na junta C e na direção do deslocamento vertical procurado)



ii. Note que apenas a barra AB é deformada (tem o tamanho diferente daquele de projeto)

$$\Delta L_{AB} = -\ 0.005\ \text{m}$$

iii. Aplicação da Equação do PTV (no caso: erro de fabricação ou montagem)

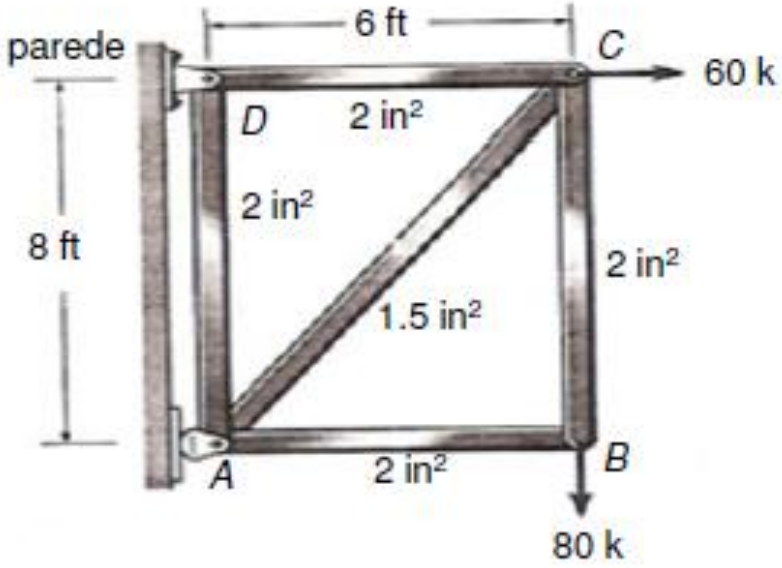
$$1 \times \Delta = \sum n \, \Delta L$$

No caso:

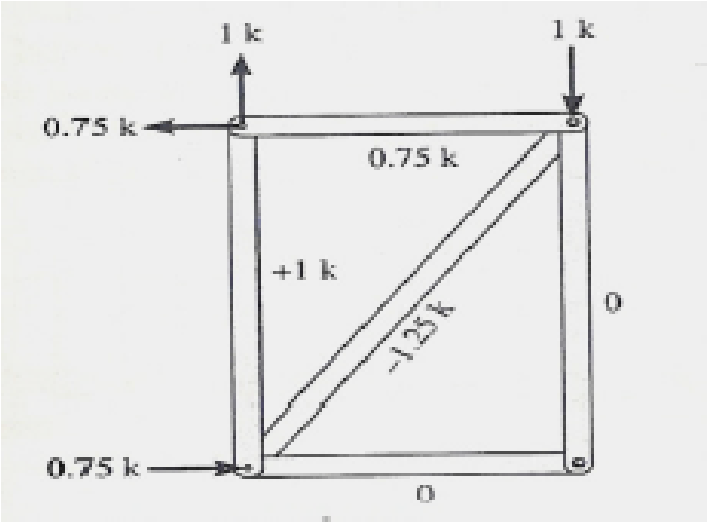
$$1 \times \Delta_{C_v} = (0.667\text{kN})(-0.005\text{m})$$

$$\Delta_{C_v} = -0.00333 \text{ m} = -3.33 \text{ mm}$$

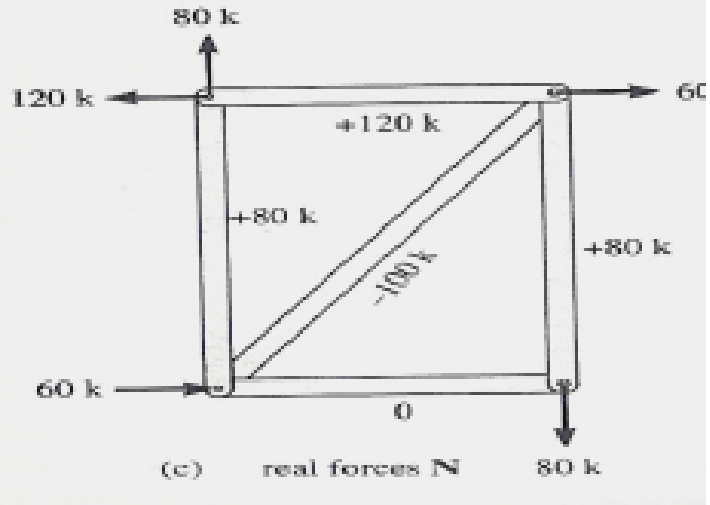
Problema 3: Determine o deslocamento vertical do ponto C da treliça metálica mostrada na figura abaixo. Devido ao calor radiante da parede, a barra AD é submetida a um aumento da temperatura de $\Delta T = +120^{\circ}$ F. Considere: E = 29 (10^3) ksi e α = 0.6 (10^{-5})/^{o}F. A seção A de todas as barras é indicada na figura.



i. Avaliação dos esforços normais virtuais **n** (P = 1 posicionada na junta C e na direção do deslocamento vertical procurado)



ii. Avaliação dos esforços normais reais **N** (forças externas reais atuantes)



iii. Aplicação da equação do PTV (efeitos: forças externas + temperatura, barra AD)

$$1 \times \Delta_{C_v} = \sum n \frac{NL}{AE} + \sum n\, \alpha\, \Delta T\, L =$$

$$= \frac{(0.75)(120)(6)(12)}{2\left[29(10^3)\right]} + \frac{(1)(80)(8)(12)}{2\left[29(10^3)\right]} + \frac{(-1.25)(-100)(10)(12)}{1.5\left[29(10^3)\right]} +$$

$$+(1)\left[0.6(10^{-5})\right](120)(8)(12)$$

temperatura, barra AD

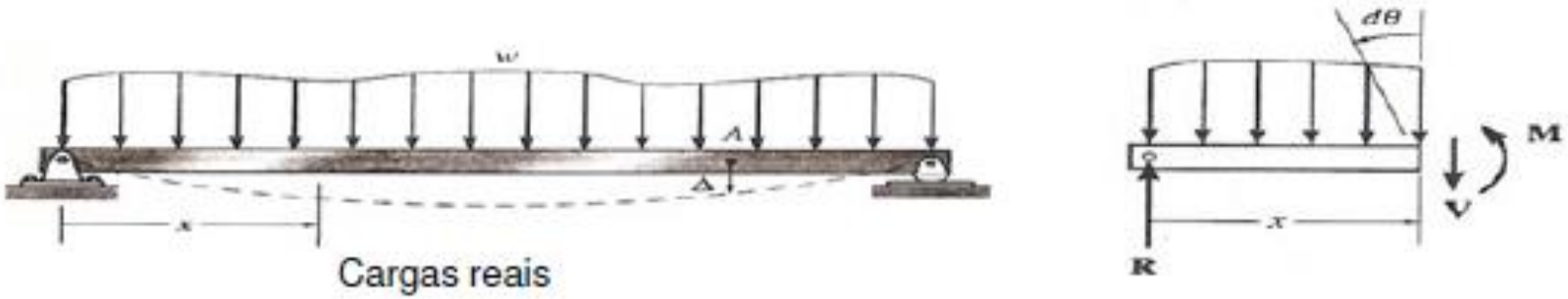
$$\Delta_{C_v} = 0.658 \text{ in}$$

5. VIGAS E PÓRTICOS (Aplicação do Princípio do Trabalho Virtual)

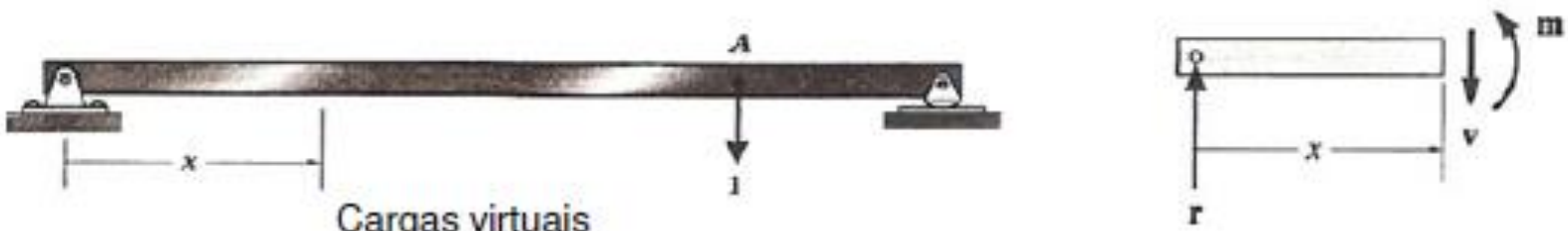
a. **Energia de Deformação Virtual**: Momento Fletor

Objetivo: avaliar o deslocamento Δ

Expressão Geral: $1 \times \Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI}\, dx$



Cargas reais



Cargas virtuais

Expressão Geral: $1 \times \Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx$

onde:

1 = força unitária externa virtual aplicada na viga ou pórtico na direção de Δ

m = momento interno virtual (função de x) na viga ou pórtico, causado pela força unitária externa virtual

Δ = deslocamento a ser avaliado causado pelas forças externas reais

M = momento interno (função de x) na viga ou pórtico causado pelas forças externas reais

E = módulo de elasticidade

I = momento de inércia da seção transversal da barra

L = comprimento da barra

Objetivo: avaliar o deslocamento θ

Expressão Geral: $1 \times \theta = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx$

onde:

1 = força unitária externa virtual aplicada na viga ou pórtico na direção de θ

m = momento interno virtual (função de x) na viga ou pórtico, causado pelo momento unitária externo virtual

θ = rotação a ser avaliada causada pelas forças externas reais

M = momento interno (função de x) na viga ou pórtico causado pelas forças externas reais

E = módulo de elasticidade

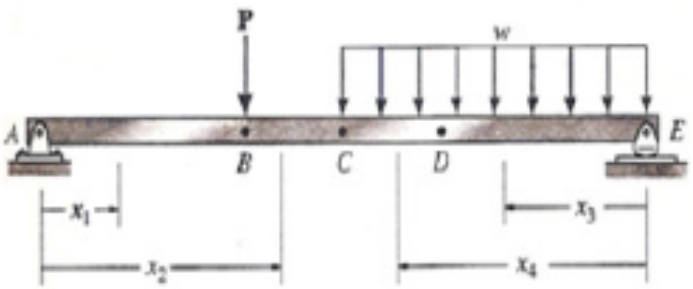
I = momento de inércia da seção transversal da barra

L = comprimento da barra

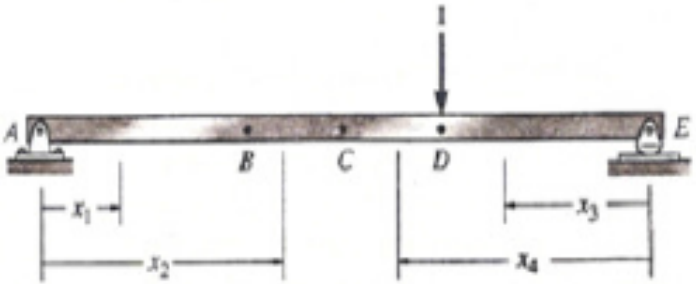
Casos

- Forças ou momentos concentrados atuantes
- Carga distribuídas descontínuas atuantes

Cuidado !!!



Cargas reais



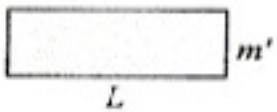
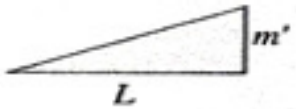
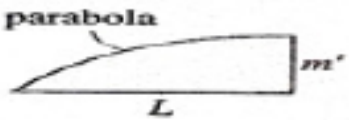
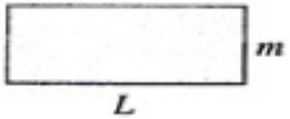
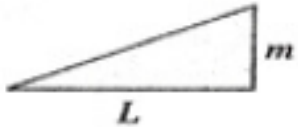
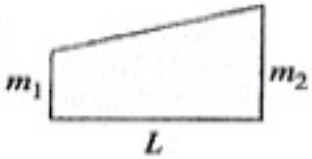
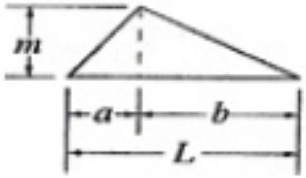
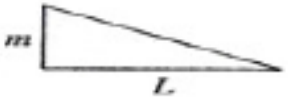
Cargas virtuais

<u>Solução 1</u>: Escolher coordenadas x`s para aquelas regiões que não apresentam descontinuidade no carregamento e avaliar a integral $\int (mM/EI)\,dx$ para cada região.

<u>Solução 2</u>: Forma TABULAR (Método TABULAR)

Os diagramas de momentos são avaliados (cargas reais e virtuais). Os diagramas para m e M são comparados com aqueles da tabela e assim a integral $\int (mM)\,dx$ pode ser determinada através de fórmula apropriada.

Avaliação de $\int_0^L mm'\,dx$

$\int_0^L mm'\,dx$				
	$mm'L$	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{2}m(m'_1+m'_2)L$	$\frac{2}{3}mm'L$
	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{3}mm'L$	$\frac{1}{6}m(m'_1+2m'_2)L$	$\frac{5}{12}mm'L$
	$\frac{1}{2}m'(m_1+m_2)L$	$\frac{1}{6}m'(m_1+2m_2)L$	$1/6\left[m'_1(2m_1+m_2)+ +m'_2(m_1+2m_2)\right]L$	$\frac{1}{12}m'(3m_1+5m_2)L$
	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{6}mm'(L+a)$	$1/6\,m_1\left[m'_1(L+b)+ +m_2(L+a)\right]$	$\frac{1}{12}mm'\left(3+\frac{3a}{L}-\frac{a^2}{L^2}\right)L$
	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{6}mm'L$	$\frac{1}{6}m(2m'_1+m'_2)L$	$\frac{1}{4}mm'L$

Procedimento de Análise

1. Momentos Virtuais m ou m_θ

- ✓ Aplique a força unitária na viga ou pórtico na direção do deslocamento que se deseja determinar.
- ✓ Caso se deseje determinar a rotação de um ponto, deve-se aplicar um momento unitário nesse ponto.
- ✓ Estabeleça de forma apropriada as coordenadas x`s (objetivo: evitar descontinuidade do carregamento).
- ✓ Resolva a viga ou pórtico para essa força ou momento unitário atuante (obtenha os momentos internos m ou m_θ).

2. Momentos Reais M

- ✓ Usando as mesmas coordenadas x`s usadas para avaliar m ou m_θ, calcule os momentos internos M causados pelas forças reais atuantes.
- ✓ Assuma a mesma convenção de sinal da etapa anterior.

3. Equação do Trabalho Virtual

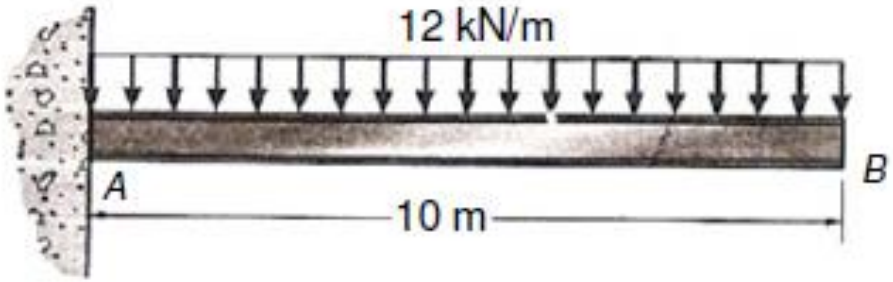
- ✓ Aplique a equação do trabalho virtual para determinar.
- ✓ O deslocamento ou a rotação desejada.
- ✓ Mantenha o sinal de **m** (ou $\mathbf{m_\theta}$) e **M** obtidos nos passos anteriores.

$$1 \times \Delta = \sum \int \frac{mM}{EI} dx \quad \text{ou} \quad 1 \times \theta = \sum \int \frac{m_\theta M}{EI} dx$$

Aplicações

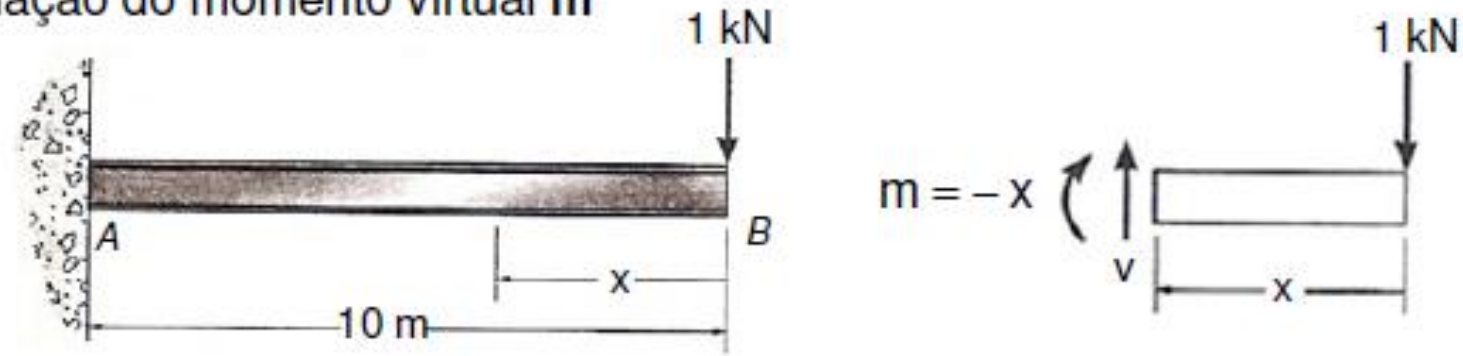
Problema 1: Determine o deslocamento do ponto B da viga metálica mostrada abaixo.

Considere: E = 200 GPa e I = 500 (10^6) mm^4.

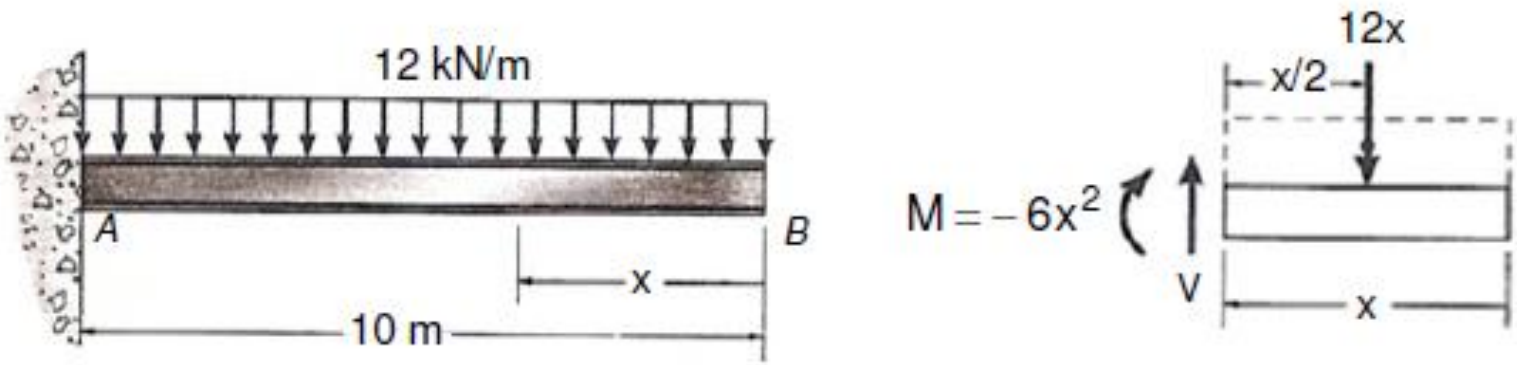


Solução:

i. Avaliação do momento virtual **m**



ii. Avaliação do momento real **M**



iii. Aplicação da equação do PTV

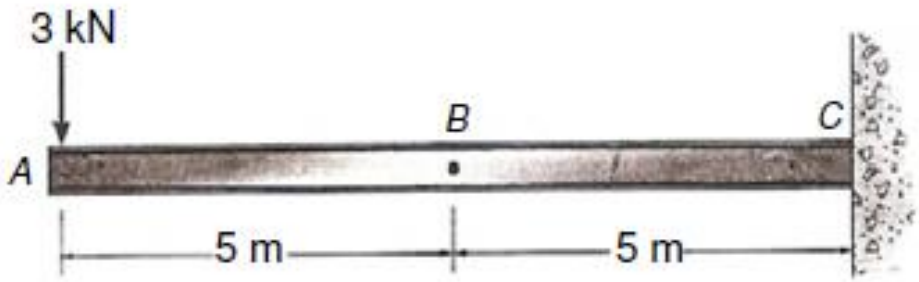
$$1 \times \Delta_B = \int_0^L \frac{mM}{EI}\,dx$$

$$1 \times \Delta_B = \int_0^{10} \frac{(-1x)(-6x^2)}{EI}\,dx \quad \therefore \quad 1\text{ kN} \times \Delta_B = \frac{15(10^3)\text{ kN}^2\text{m}^3}{EI}$$

$$\Delta_B = \frac{15(10^3)\text{ kNm}^3}{200(10^6)\text{ kN/m}^2(500(10^6)\text{ mm}^4)(10^{-12}\text{ m}^4/\text{mm}^4)} = 0.150\text{ m} = 150\text{ mm}$$

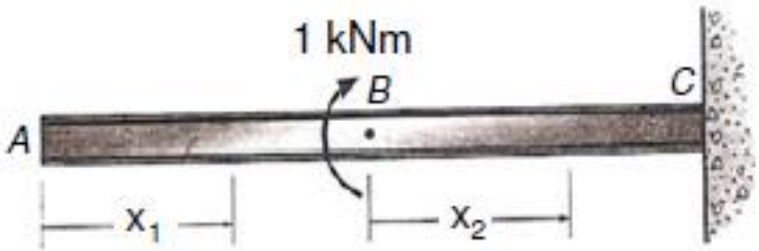
Problema 2: Determine a inclinação θ no ponto B da viga metálica mostrada abaixo.

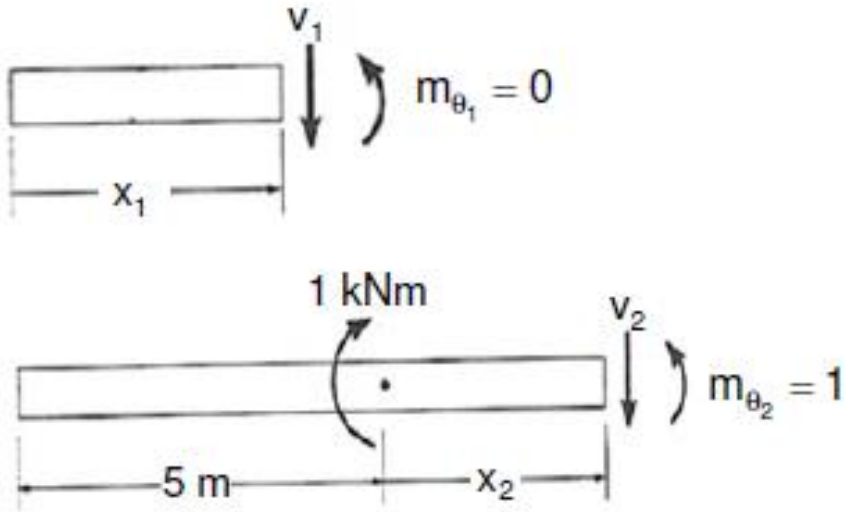
Considere: E = 200 GPa e I = 60 (10^6) mm^4.



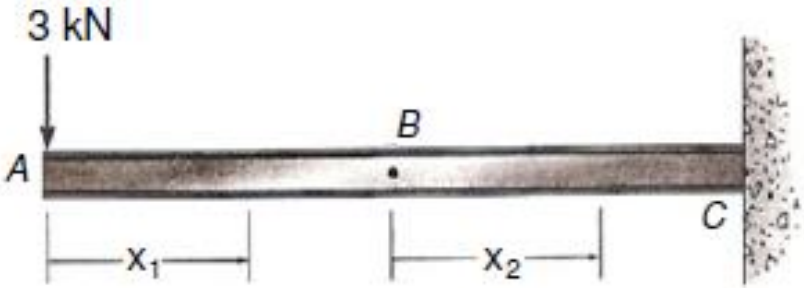
Solução:

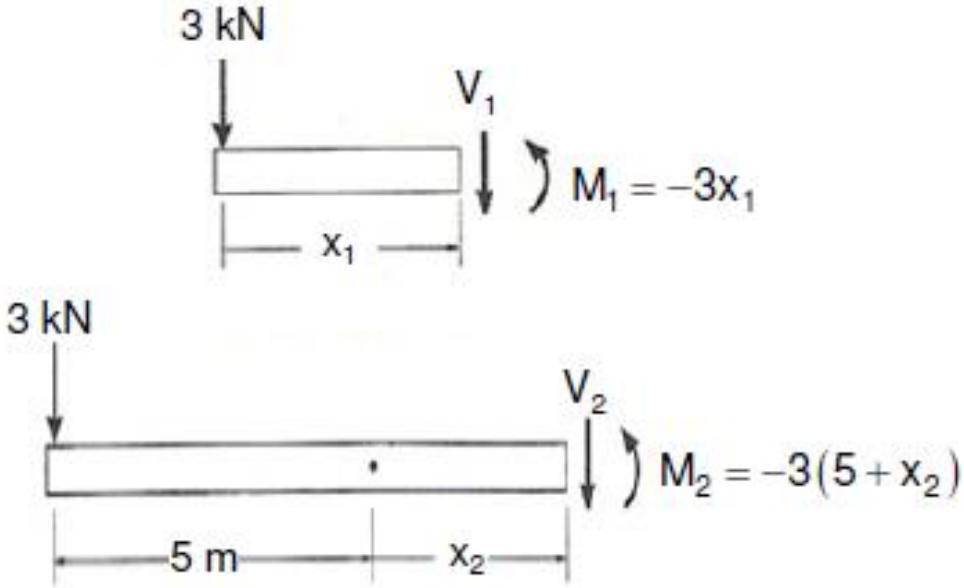
i. Avaliação do momento virtual $\mathbf{m_\theta}$





ii. Avaliação do momento real **M**





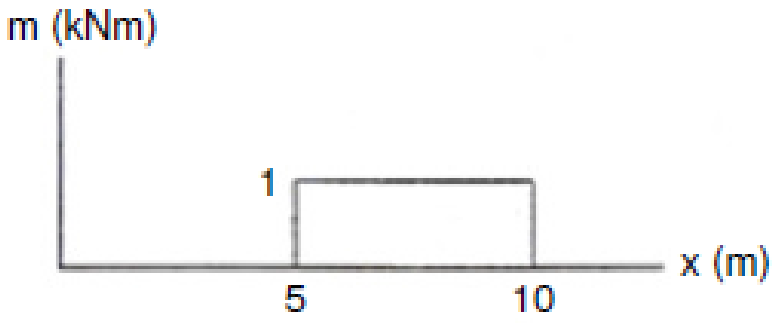
iii. Aplicação da equação do PTV

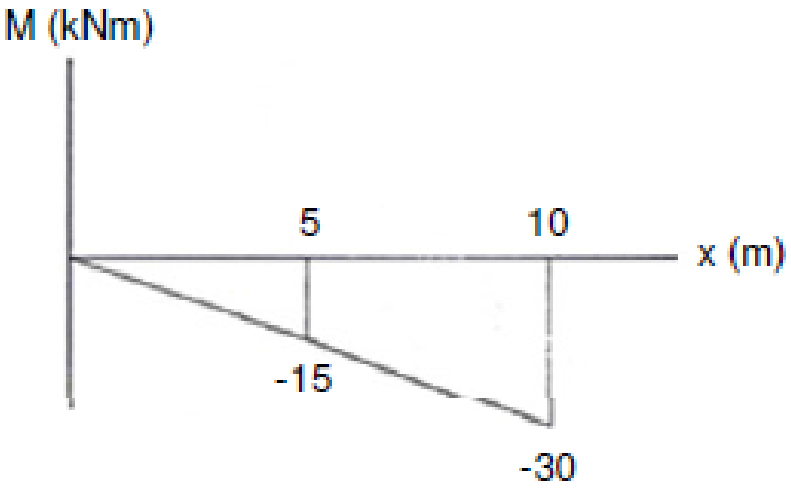
$$1 \times \theta_B = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI}\,dx = \int_0^5 \frac{(0)(-3x_1)}{EI}dx_1 + \int_5^{10} \frac{(1)\left[-3(5+x_2)\right]}{EI}dx_2$$

$$\theta_B = \frac{-112.5\ \text{kNm}^2}{EI}$$

Observação: **Método Tabular**

1. Construção dos diagramas:





2. Da apropriada linha e coluna da tabela:

$$\int_5^{10} m_\theta M dx = \frac{1}{2} m (M_1 + M_2) L = \frac{1}{2}(1)(-15-30)(5) = -112.5 \text{ kN}^2\text{m}^3$$

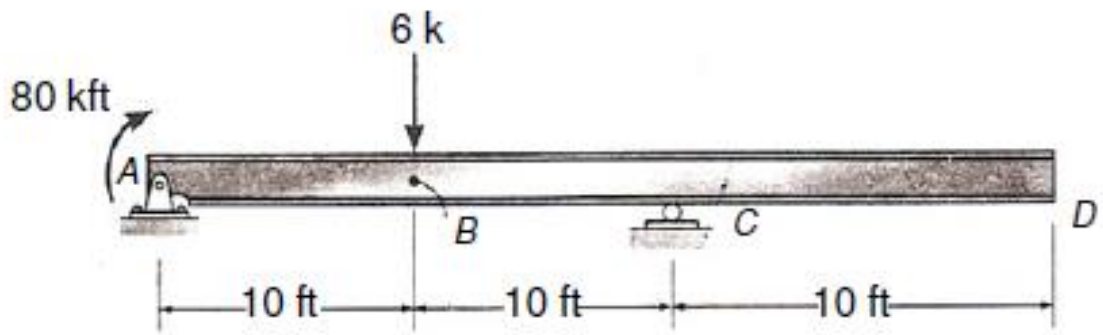
Que é o mesmo valor obtido anteriormente.

Assim:

$$(1\ \text{kNm}) \times \theta_B = \frac{-112.5\ \text{kN}^2\text{m}^2}{200(10^6)\ \text{kN/m}^2\left[60(10^6)\ \text{mm}^4\right](10^{-12}\ \text{m}^4/\text{mm}^4)} = -0.00938\ \text{rad}$$

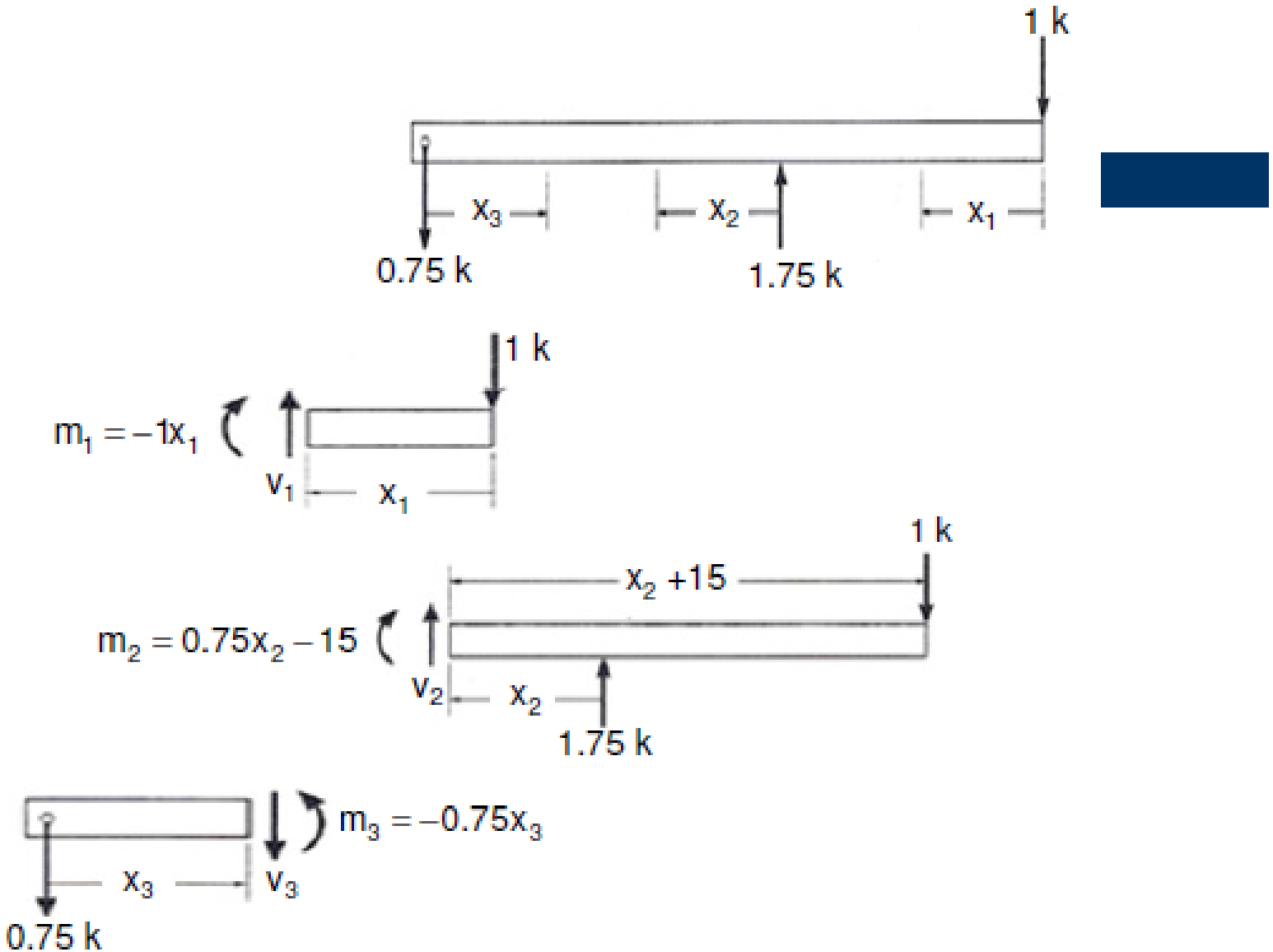
Problema 3: Determine o deslocamento vertical no ponto D da viga metálica a seguir.

Considere: $E = 29(10^3)$ ksi e $I = 800\ \text{in}^4$.

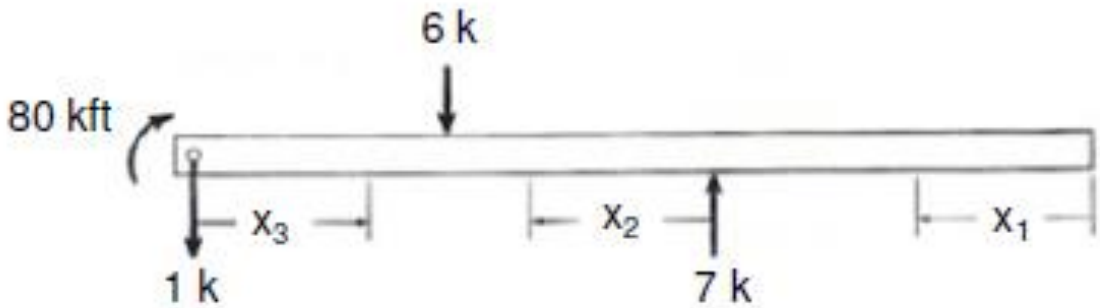


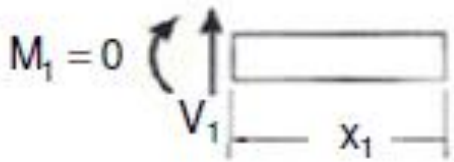
Solução:

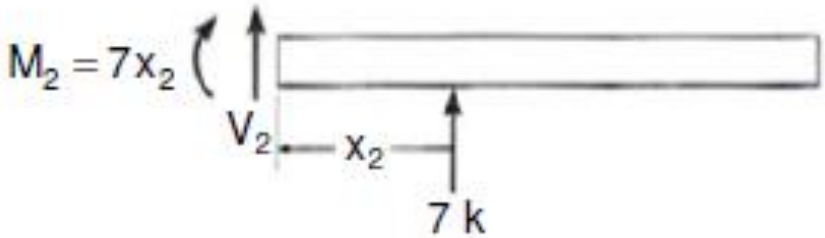
i. Avaliação do momento virtual **m**

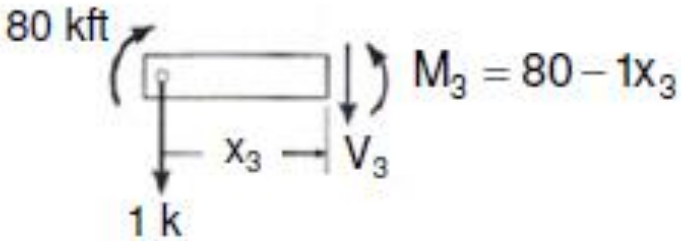


ii. Avaliação do momento real **M**









iii. Aplicação da equação do PTV

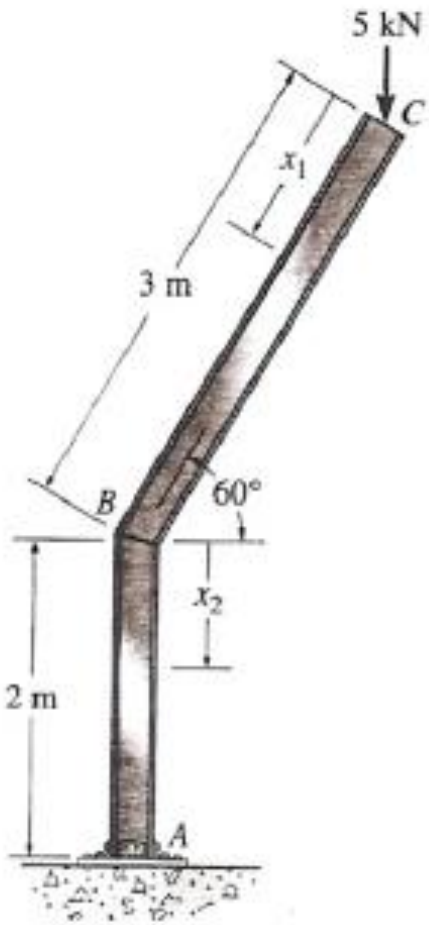
$$1 \times \Delta_D = \int_0^L \frac{mM}{EI}\,dx = \int_0^{15} \frac{(-1x_1)(0)}{EI}dx_1 + \int_0^{10} \frac{(0.75x_2 - 15)(7x_2)}{EI}dx_2 + \int_0^{10} \frac{(0.75x_3)(80 - 1x_3)}{EI}dx_3$$

$$\Delta_D = \frac{0}{EI} - \frac{3500}{EI} - \frac{2750}{EI} = -\frac{6250\ k \cdot ft^3}{EI}$$

$$\Delta_D = -\frac{6250\ k \cdot ft^3\,(12)^3\ \ in^3/ft^3}{29(10^3)\ k/in^2\ \ (800\ in^4)} = -0.466\ in$$

Problema 4. Determine a rotação θ no ponto C do pórtico metálico a seguir.

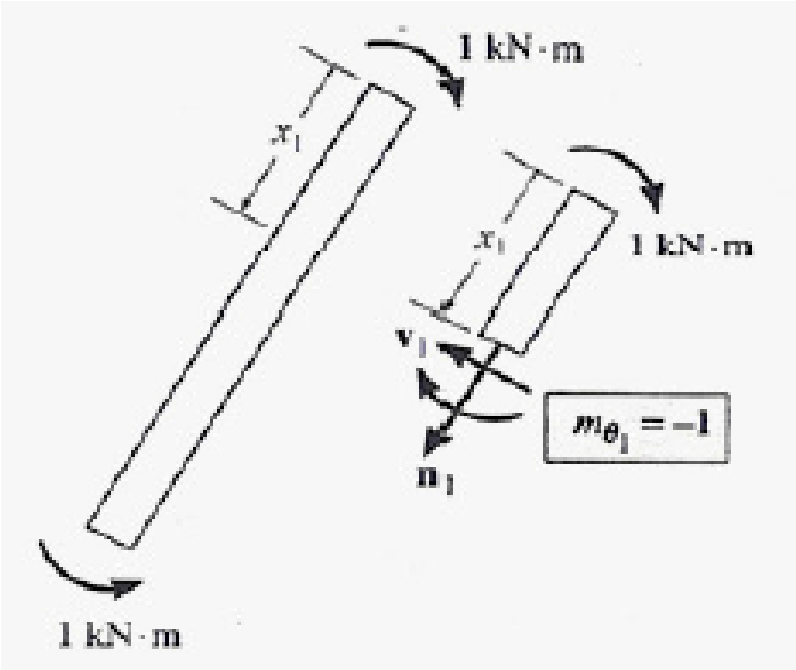
Considere: E = 200 GPa e I = 15(10⁶) mm⁴.



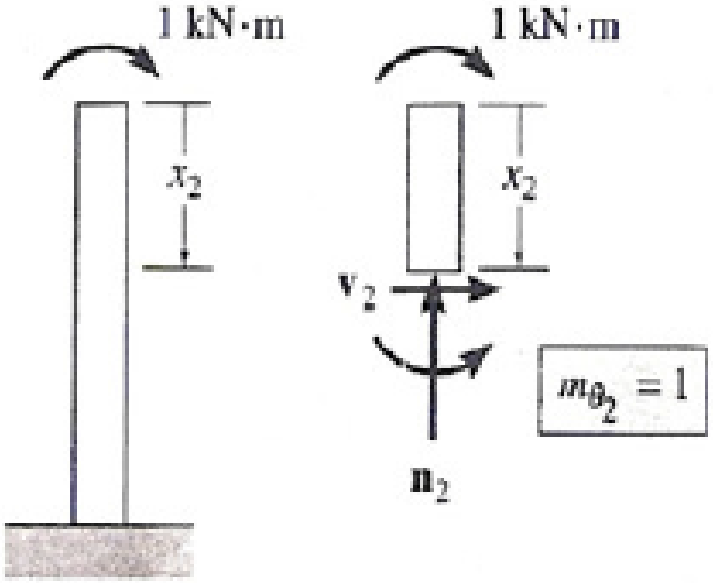
Solução:

i. Avaliação do momento virtual $\mathbf{m_\theta}$

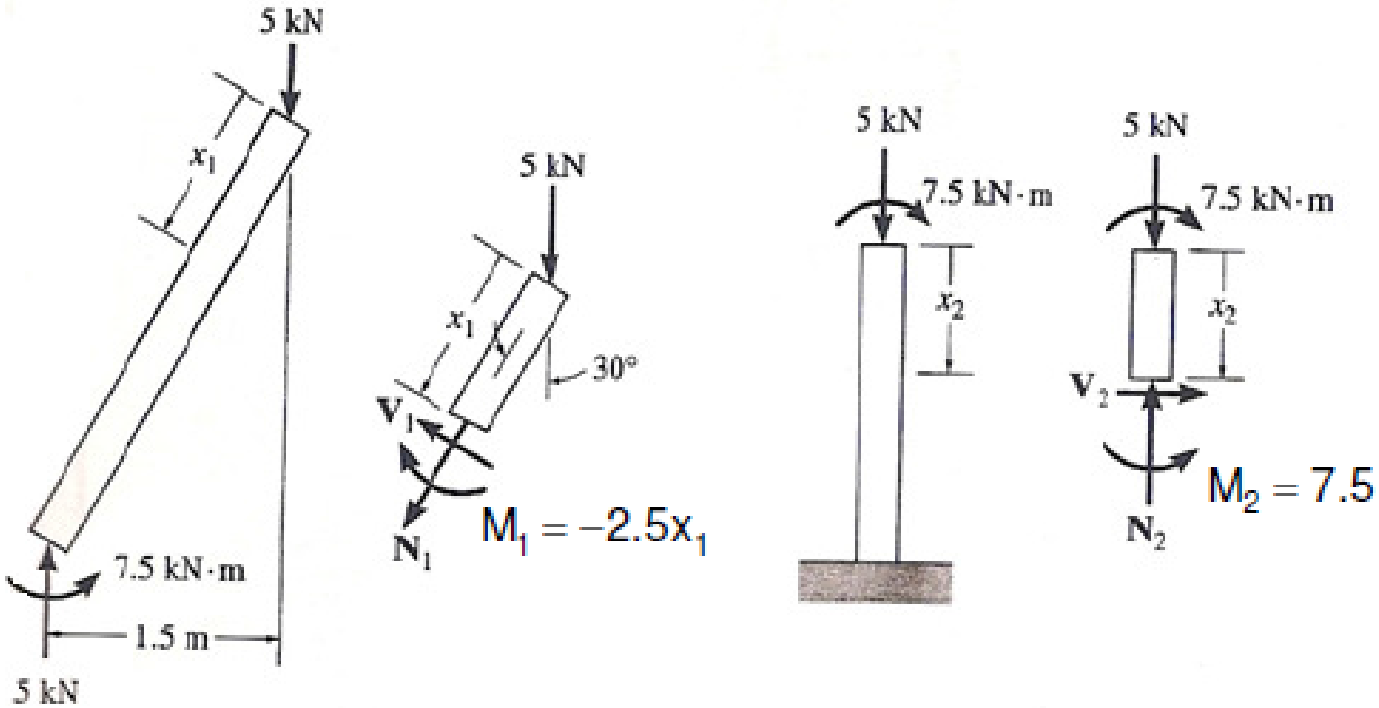
Barra BC



Barra AB



ii. Avaliação do momento real **M**

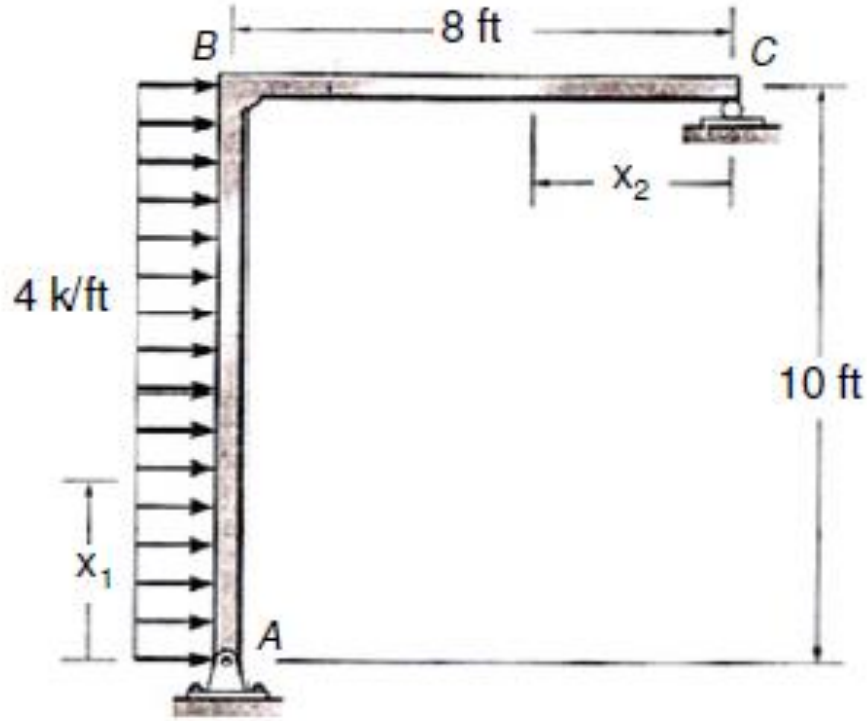


iii. Aplicação da equação do PTV

$$1 \times \theta_C = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI}\,dx = \int_0^3 \frac{(-1)(-2.5x_1)}{EI}dx_1 + \int_0^2 \frac{(1)(7.5)}{EI}dx_2 = \frac{11.25}{EI} + \frac{15}{EI} = \frac{26.25\ \text{KN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

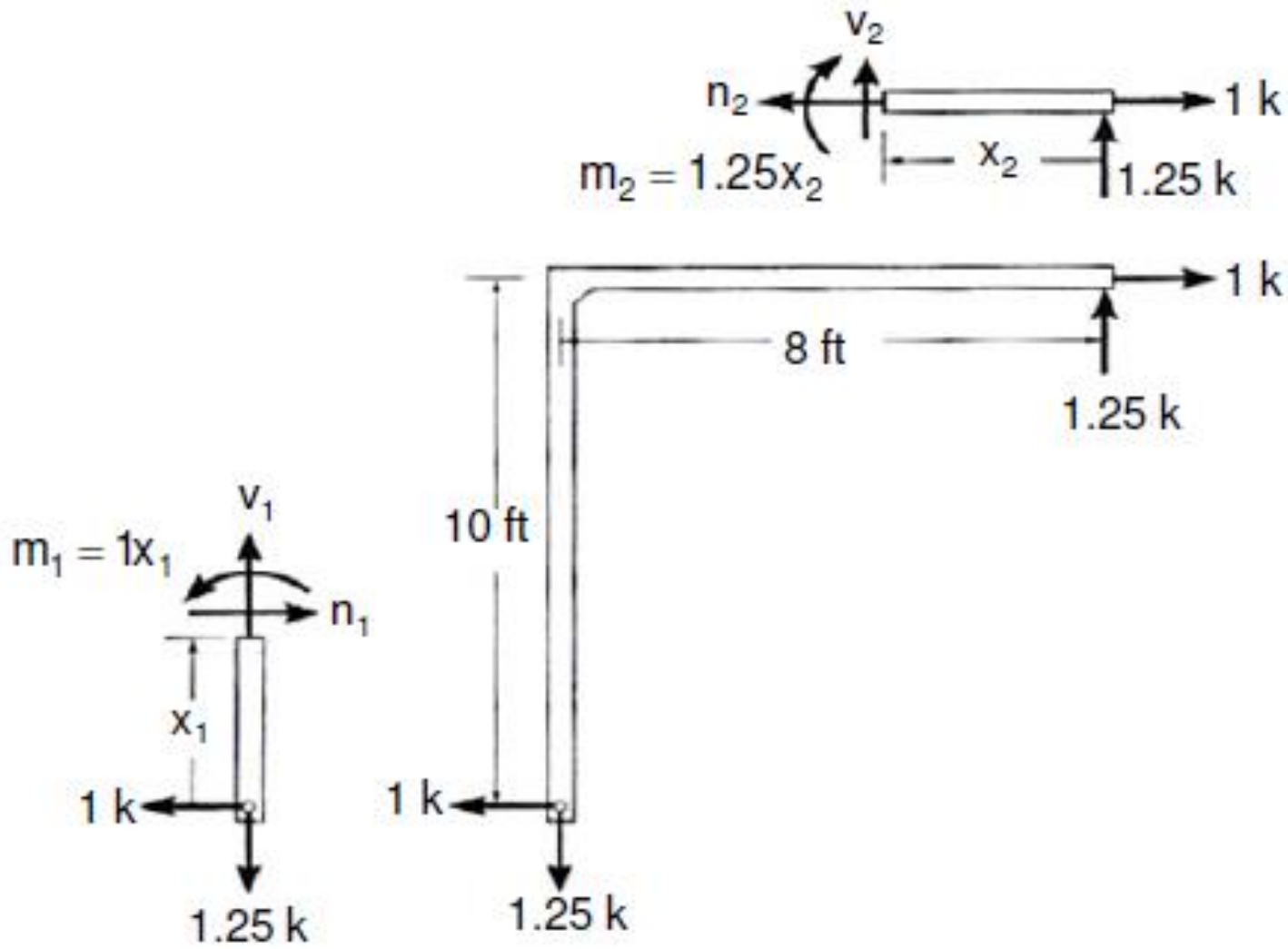
$$\theta_C = \frac{26.25\ \text{KN}\cdot\text{m}^2}{200(10^6)\ \text{KN/m}^2\left[16(10^6)\ \text{mm}^4\right](10^{-12}\ \text{m}^4/\text{mm}^4)} = 0.00875\ \text{rad}$$

Problema 5: Determine o deslocamento horizontal no ponto C do pórtico metálico mostrado abaixo. Considere: E = 200 GPa e I = 15(10^6) mm^4.

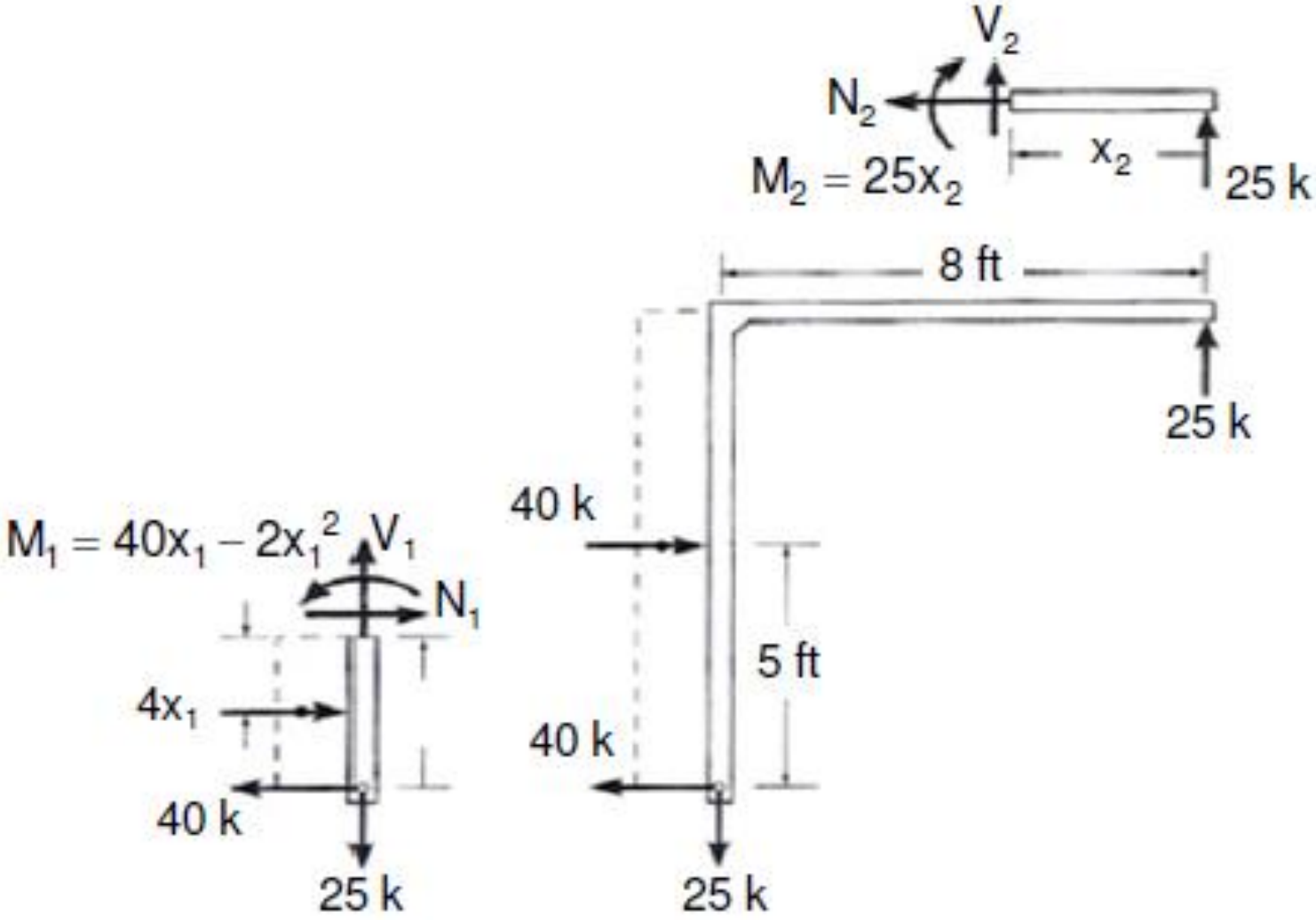


Solução:

i. Avaliação do momento virtual **m**



ii. Avaliação do momento real **M**



iii. Aplicação da equação do PTV

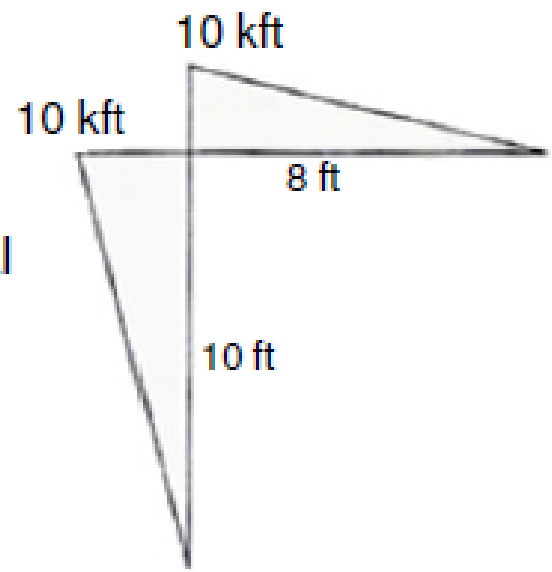
$$1 \times \Delta_{C_h} = \int_0^L \frac{mM}{EI}\,dx = \int_0^{10} \frac{(1x_1)(40x_1 - 2x_1^2)}{EI}dx_1 + \int_0^8 \frac{(1.25x_2)(25x_2)}{EI}dx_2$$

$$\Delta_{C_h} = \frac{8333.3}{EI} + \frac{5333.3}{EI} = \frac{13666.6\ k \cdot ft^3}{EI}$$

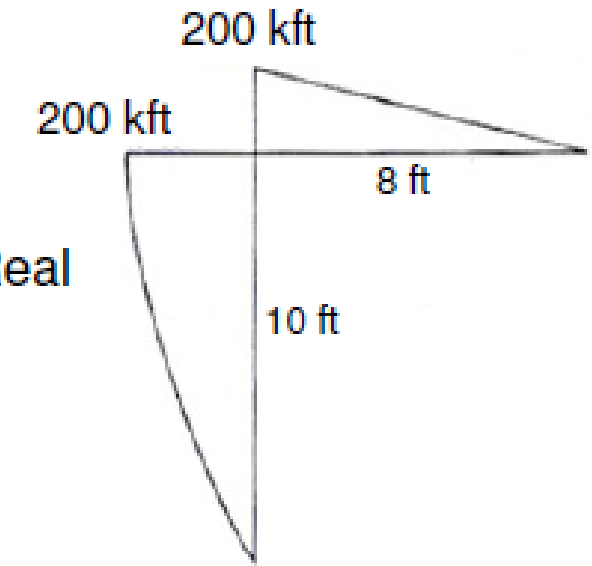
Observação: **<u>Método Tabular</u>**

1. Construção dos diagramas

Força Virtual



Força Real



2. Das apropriadas linhas e colunas da tabela

$$\int mMdx = \frac{5}{12}(10)(200)(10) + \frac{1}{3}(10)(200)(8) = 8333.3 + 5333.3 = 13666.6\ k^2 \cdot ft^3$$

Que é o mesmo valor obtido anteriormente. Assim:

$$\Delta_{C_h} = \frac{13666.7\ k \cdot ft^3}{\left[29(10^3)k/in^2\left((12)^2 in^2/ft^2\right)\right]\left[600\ in^4\left(ft^4/(12)^4 in^4\right)\right]} = 0.113\ ft = 1.36\ in$$

b. **Energia de Deformação Virtual**: Força Axial (Esforço Normal)

$$U_a = \sum \frac{nNL}{AE}$$

onde:

n = forças normais virtuais internas atuantes nas barras causadas pela força externa virtual unitária

N = forças normais internas atuantes nas barras causadas pelas forças reais

L = comprimento da barra

A = área da seção transversal da barra

E = módulo de elasticidade do material

c. **Energia de Deformação Virtual**: Esforço Cortante

$$U_s = \sum \int_0^L K\left(\frac{\nu V}{GA}\right) dx$$

onde:

n = forças cisalhantes virtuais internas atuantes nas barras, expressas como funções de x, causadas pela força externa virtual unitária

V = forças cisalhantes internas atuantes nas barras, pressas como funções de x, causadas pelas forças reais

K = fator dependente da forma da seção transversal

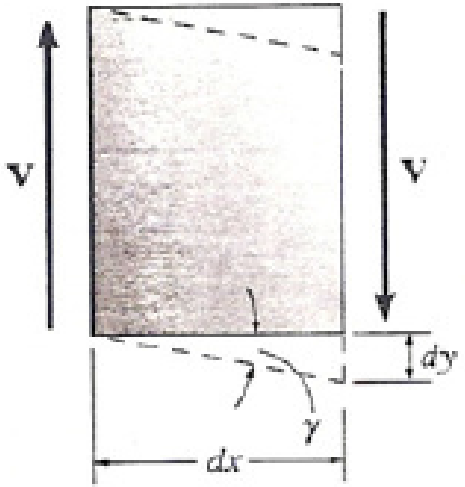
(K = 1.2 : seção transversal retangular)

(K = 10/9 : seção transversal circular)

(K = 1.0 : seção transversal I, perfil I)

A = área da seção transversal da barra

G = módulo de elasticidade transversal do material



d. **Energia de Deformação Virtual**: Torção

$$U_t = \sum \frac{tTL}{GJ}$$

onde:

t = momentos de torção virtuais internos atuantes nas barras causados pela força externa virtual unitária

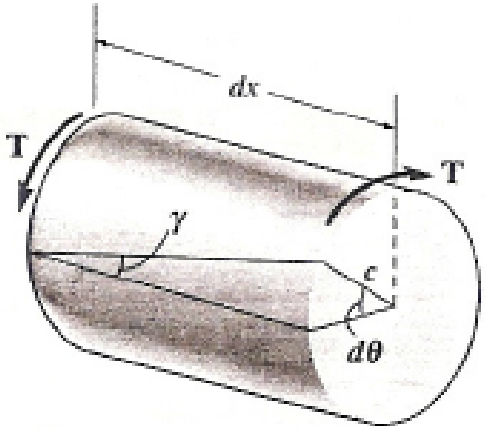
T = momentos de torção internos atuantes nas barras, causados pelas forças reais

L = comprimento da barra

J = momento de inércia polar da seção transversal

($J = \pi c^4/2$, onde c é o raio da seção transversal)

G = módulo de elasticidade transversal do material



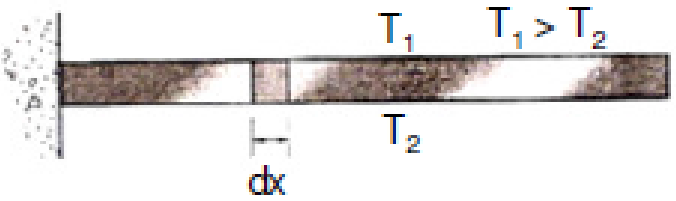
d. **Energia de Deformação Virtual**: Temperatura

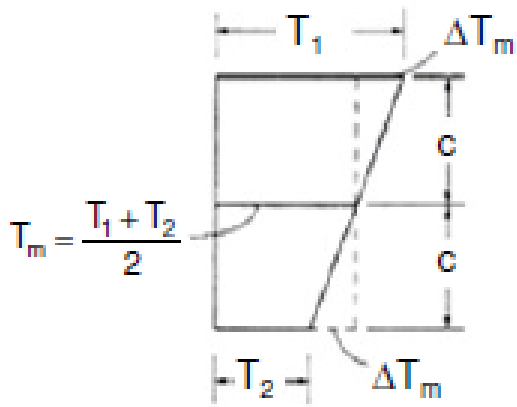
Efeito: Variação uniforme de temperatura ΔT

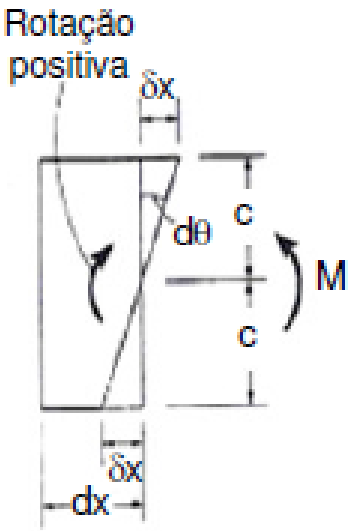
$$U_{Temp} = \sum n \, \alpha \, \Delta T \, L$$

Efeito: Diferença de temperatura ao longo da seção transversal do perfil

$$U_{Temp} = \sum \int_0^L m \, \frac{\alpha \Delta T_m}{c} \, dx$$







$$d\theta = \frac{\alpha \Delta T_m dx}{c}$$

onde:

m = momento virtual interno nas barra causado pela força virtual externa unitária

α = coeficiente de dilatação térmica

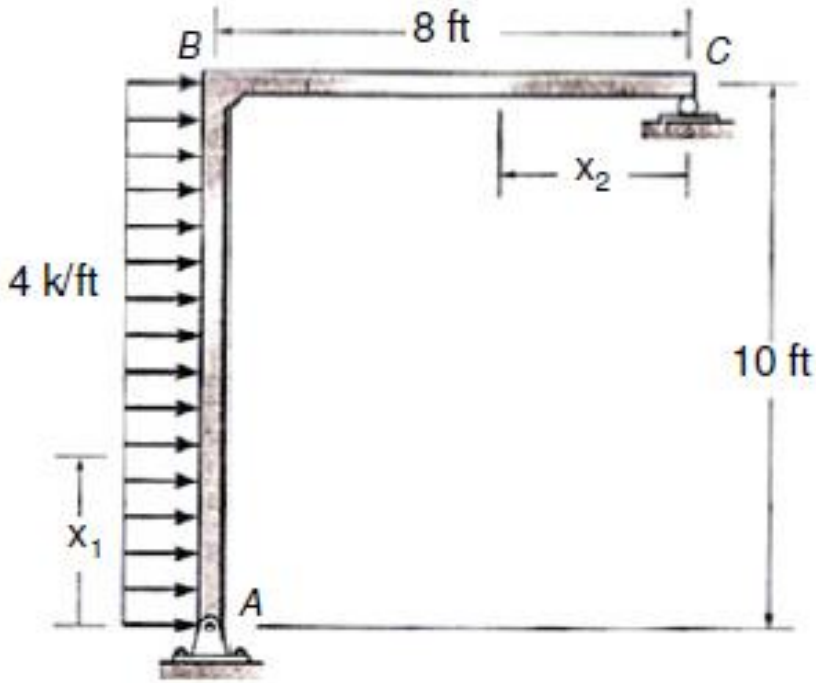
ΔT_m = diferença entre a temperatura média e a temperatura do topo ou base da seção da viga

c = metade da altura da seção

L = comprimento da barra

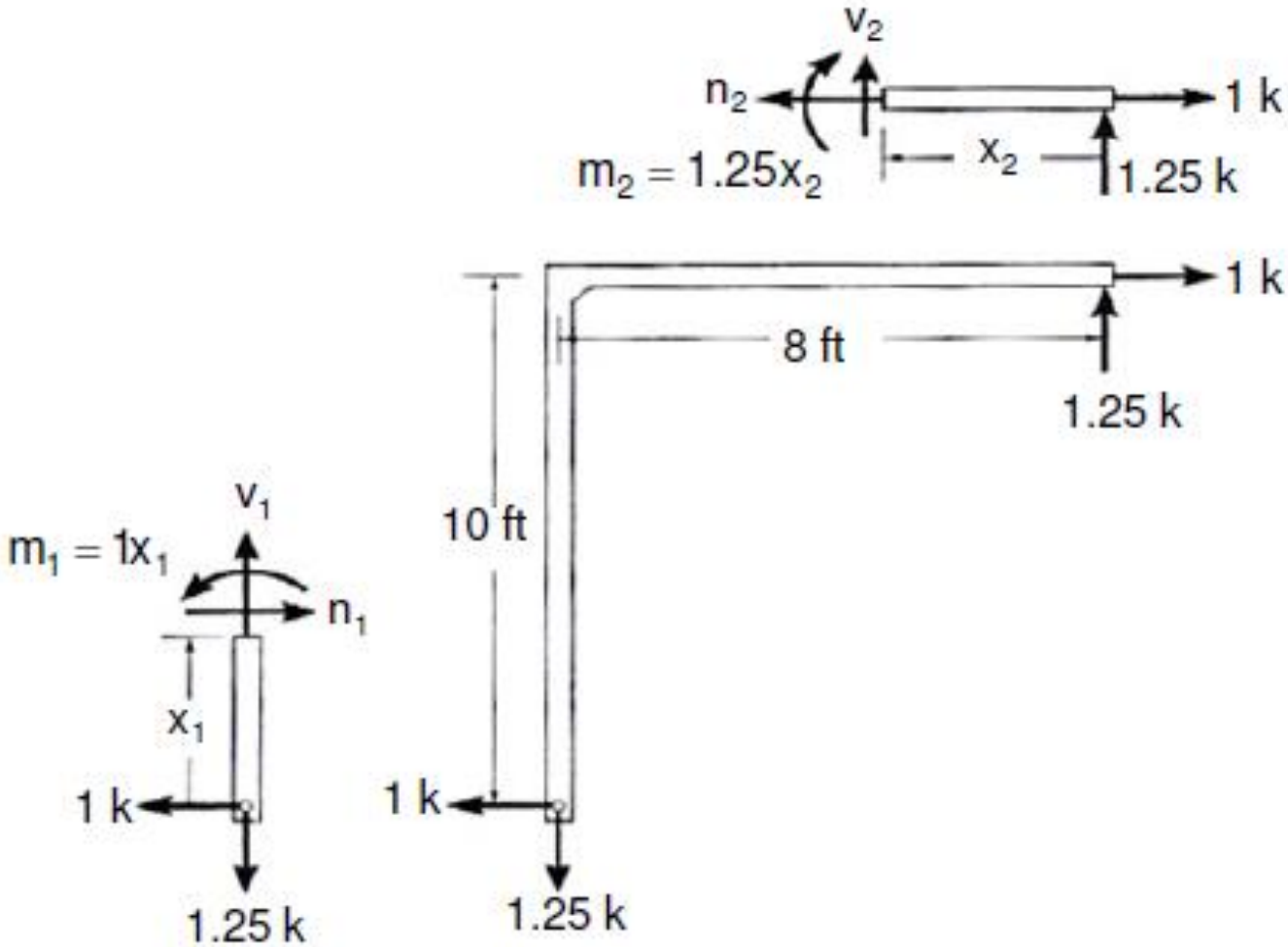
Aplicações

Problema 1: Determine o deslocamento horizontal no ponto C do pórtico metálico mostrado abaixo. Considere: $E = 29(10^3)$ ksi, $G = 12(10^3)$ ksi, $I = 600$ in^4, e $A = 80$ in^2 para ambos os membros.

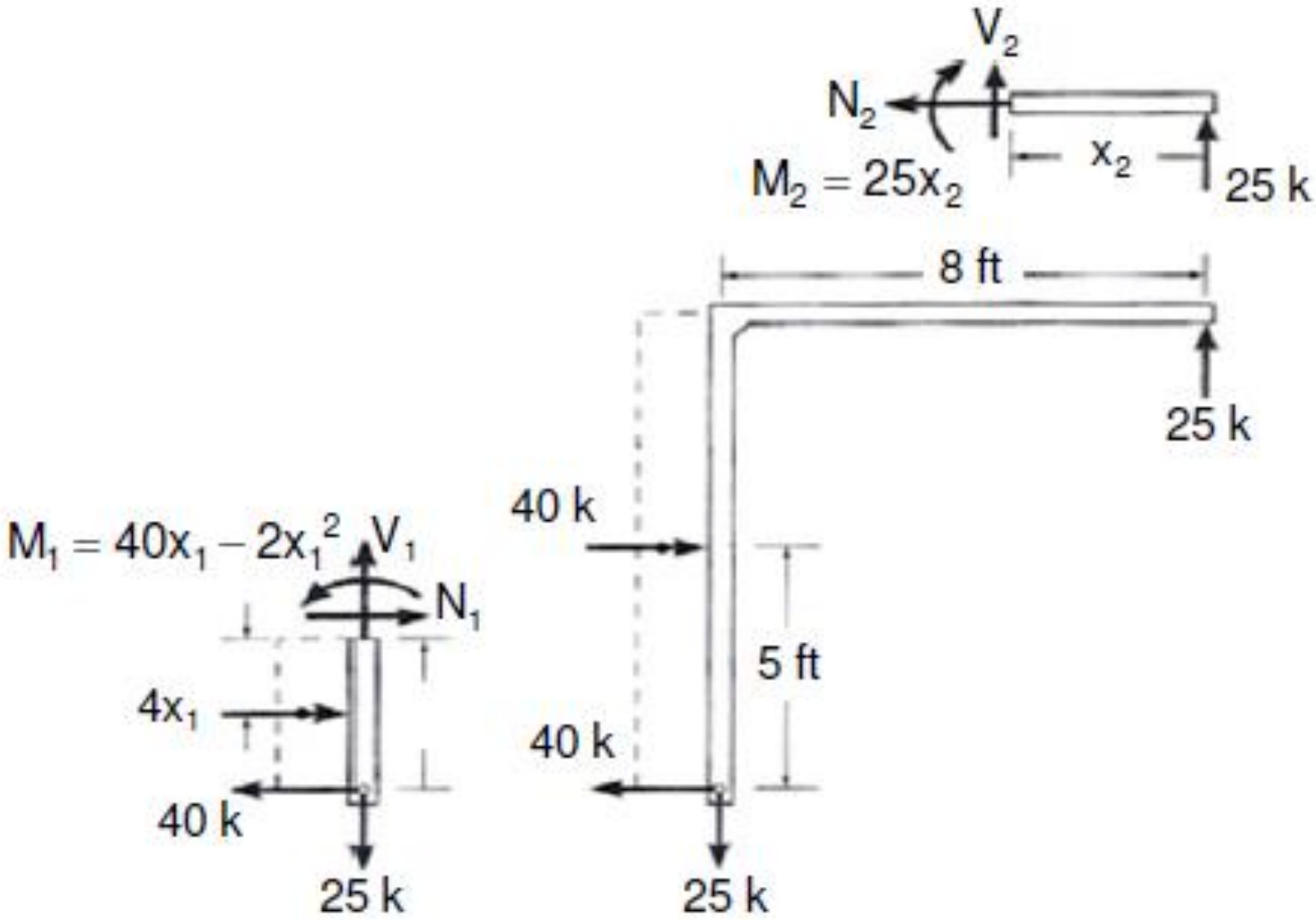


Solução:

i. Avaliação do momento virtual **m**



ii. Avaliação do momento real **M**



iii. Aplicação da equação do PTV

- ✓ Deformação de Flexão:

$$U_b = \int \frac{mM}{EI} dx = \frac{13666.6\ k^2 \cdot ft^3 (12^3\ in^3/ft^3)}{\left[29(10^3)k/in^2\right](600\ in^4)} = 1.357\ in \cdot k$$

- ✓ Deformação Axial:

$$U_a = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{(1.25k)(25k)(120\ in)}{80\ in^2\left[29(10^3)k/in^2\right]} + \frac{(1\,k)(0)(96\ in)}{80\ in^2\left[29(10^3)k/in^2\right]} = 0.001616\ in \cdot k$$

- ✓ Deformação Cisalhante:

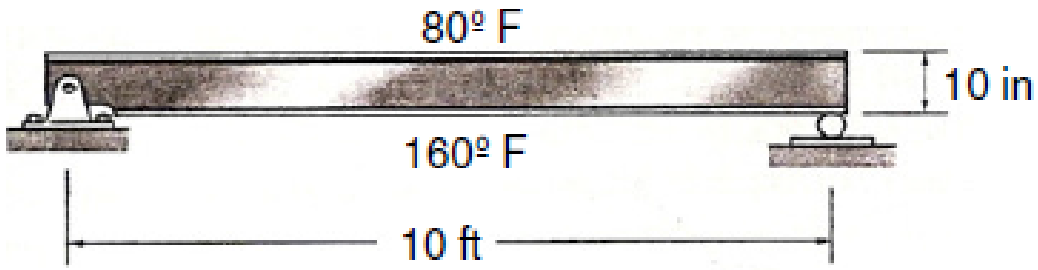
$$U_s = \int_0^L K\left(\frac{\upsilon V}{GA}\right) dx = \int_0^{10} \frac{1.2(1)(40-4x_1)}{GA} dx_1 + \int_0^8 \frac{1.2(-1.25)(-25)}{GA} dx_2 =$$

$$= \frac{540\ k^2 \cdot ft(12\ in/ft)}{\left[12(10^3)k/in^2\right](80\ in^2)} = 0.00675\ in \cdot k$$

$$1\ k \times \Delta_{C_h} = 1.357\ in \cdot k + 0.001616\ in \cdot k + 0.00675\ in \cdot k$$

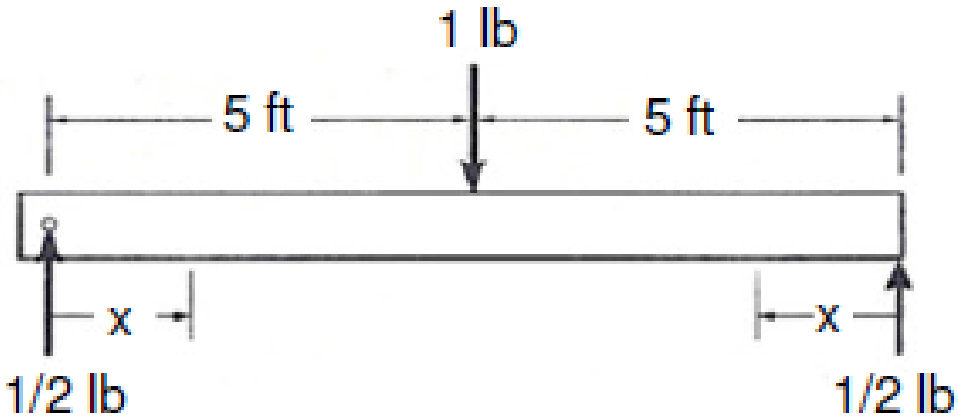
$$\Delta_{C_h} = 1.37\ in$$

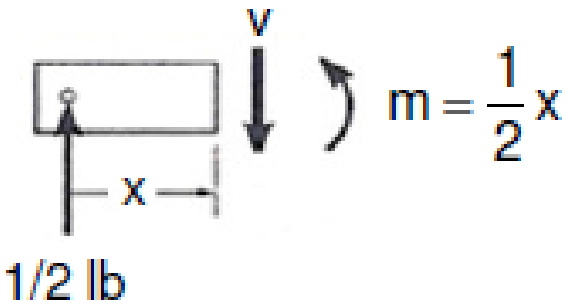
Problema 2: A viga mostrada abaixo é usada num sistema estrutural sujeito a duas temperaturas diferentes. Se a temperatura do topo da seção é 80º F e a da base é 160º F, determine o deslocamento vertical no meio da viga devido a esse gradiente de temperatura. Considere: $\alpha = 6.5(10^{-6})/^{o}F$.



Solução:

i. Avaliação do momento virtual **m**





ii. Aplicação da equação do PTV

✓ Temperatura média no centro da viga:

$$T_m = \frac{160^\circ + 80^\circ}{2} = 120^\circ F$$

Assim:

$$\Delta T_m = 120^\circ - 80^\circ = 40^\circ\,F$$

$$1\ lb \times \Delta_{C_v} = \int_0^L \frac{m\alpha\Delta T_m}{c}dx = 2\int_0^{60\ in} \frac{(1/2)6.5(10^{-6})/^\circ F(40\ ^\circ F)}{5\ in}dx$$

$$\Delta_{C_v} = 0.0936\ in$$