MECÂNICA DOS SOLOS II

Acréscimos de Tensão no Solo

Aula 3 - Notas de aula

Distribuição de Tensão no Solo

Muitos problemas em obras de engenharia são causados por

- **recalques,**
- **empuxos de terras, e**
- **capacidade de carga dos solos.**

Por isso é necessário *conhecer as distribuição de pressões (tensões)* que ocorrem nas várias profundidades abaixo da superfície do solo, devido ao peso próprio e por carregamentos induzidos .

Distribuição de Tensão no Solo

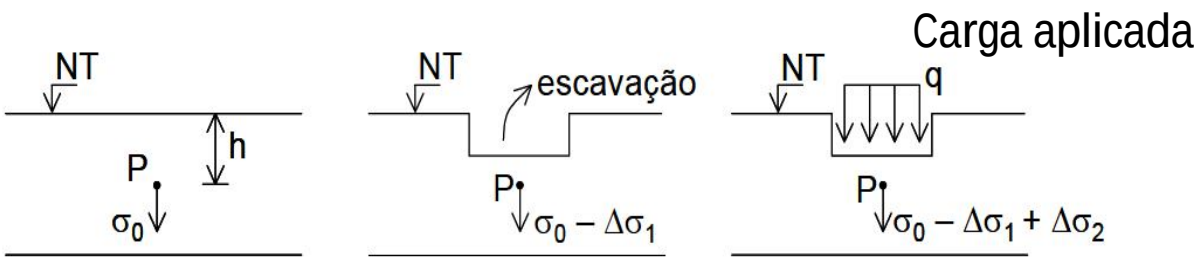
As pressões (tensões) existentes nos maciços terrosos decorrem :

- Peso próprio do solo (pressões virgens);
- Cargas estruturais aplicadas (pressões induzidas)

Distribuição de Tensão no Solo

A pressão vertical resultante em um ponto P no interior de um maciço, considerando-se uma carga aplicada no fundo de uma cava de uma fundação será dada como:

$$\sigma = \left(\sigma_0 - \Delta\sigma_1\right) + \sigma_2$$



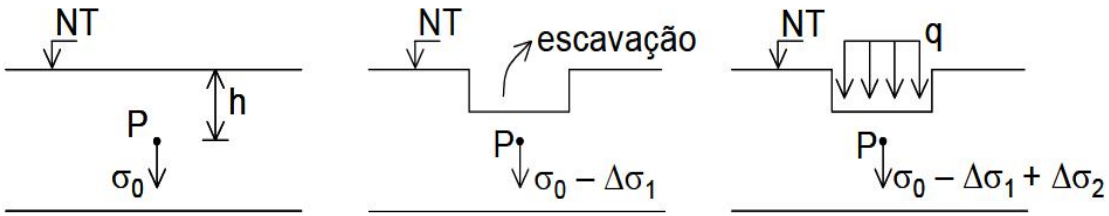
sendo:

σ_0 = tensão devida ao peso próprio do solo;

$\Delta\sigma_1$ = alívio de tensão devido à escavação;

$\Delta\sigma_2$ = tensão induzida pelo carregamento "q".

Distribuição de Tensão no Solo



σ_0 = tensão devida ao peso próprio do solo;

$\Delta\sigma_1$ = alívio de tensão devido à escavação;

$\Delta\sigma_2$ = tensão induzida pelo carregamento “q”.

ACRÉSCIMOS DE TENSÃO NO SOLO

PRESSÕES DEVIDAS A CARGAS APLICADAS

- **Ao se aplicar uma carga na superfície de um terreno, numa área bem definida, os acréscimos de tensão numa certa profundidade não se limitam à projeção da área carregada.**

- **Nas laterais da área carregada também ocorrem aumentos de tensão, que se somam às anteriores devidas ao peso próprio.**

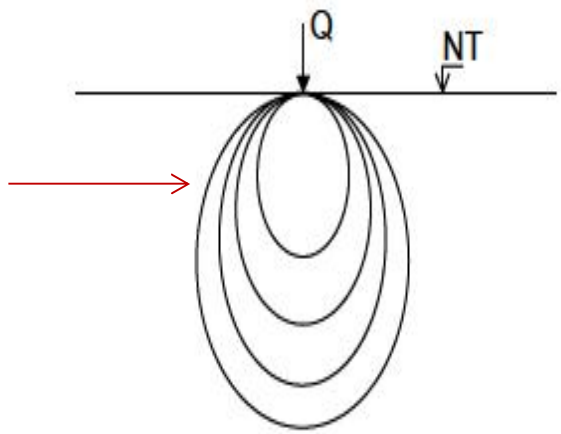
ACRÉSCIMOS DE TENSÃO NO SOLO

PRESSÕES DEVIDAS A CARGAS APLICADAS

1.2.2. BULBO DE TENSÕES

Denominam-se isóbaras as curvas ou superfícies obtidas ligando-se os pontos de mesma tensão vertical. Este conjunto de isóbaras forma o que se chama BULBO DE TENSÕES.

Isóbaras – curvas ou superfícies de mesma tensão



ACRÉSCIMOS DE TENSÃO NO SOLO

PRESSÕES DEVIDAS A CARGAS APLICADAS

As pressões produzidas por cargas aplicadas na superfície de um maciço terroso são calculadas (avaliadas) com base na teoria da Elasticidade, ou seja:

Consideram o solo como um material:

- Homogêneo: mesmas propriedades em todos os pontos;
- Isotrópico: mesmas propriedades em todas as direções;
- Elástico[1]: obedece a Lei de Hooke, $\sigma = E \times \varepsilon$ (tensões proporcionais às deformações).

---

[1] Regime elástico: as tensões crescem linearmente com as deformações e o corpo recupera a forma e o volume iniciais ao cessar a ação das forças.

As soluções, usualmente adotadas , se baseiam em modelos teóricos, e portanto são aproximadas da realidade.

ACRÉSCIMOS DE TENSÃO NO SOLO

FÓRMULAS PARA CÁLCULO

Algumas fórmulas matemáticas, de diferentes autores permitem o cálculo dos acréscimos de tensões verticais no solo conforme o tipo de carregamento:

- ***Carga concentrada***
- ***Carga uniformemente distribuída em uma faixa***
- ***Carga distribuída sobre uma placa retangular***
- ***Hipótese Simples – Espraiamento de tensões***
- ***Outras :***
- ***Carga distribuída sobre uma placa circular***
- ***Carregamento Triangular***

ACRÉSCIMOS DE TENSÃO NO SOLO

FÓRMULAS PARA CÁLCULO

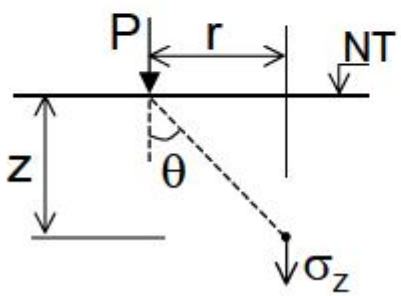
Cálculo dos acréscimos de tensões verticais no solo.

- ***Carga concentrada (pontual)– Solução de Boussinesq***

Admite constante o módulo de elasticidade E = cte (Estrutura flexível)

SOLUÇÃO DE BOUSSINESQ

A equação de Boussinesq determina os acréscimos de tensões verticais devidos a uma carga pontual aplicada na superfície.

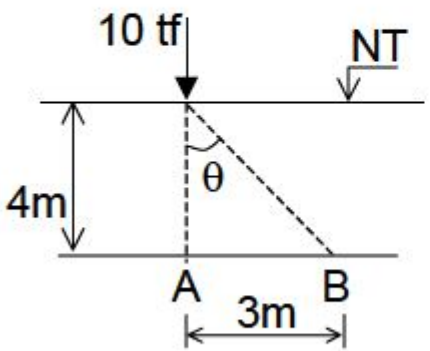


$$\boxed{\sigma_z = \frac{3 \cdot P}{2 \cdot \pi \cdot z^2} \times \cos^5 \theta}$$

$$Ou \quad \sigma_z = \frac{P}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{3 \cdot z^3}{\left(r^2 + z^2\right)^{5/2}}$$

Carga concentrada – Solução de Boussinesq

Utilizando a solução de Boussinesq, determinar os acréscimos de pressão nos pontos A e B.



Solução:

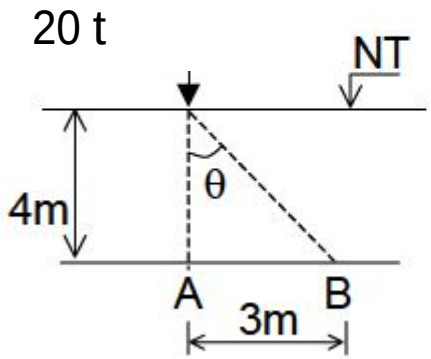
$$\text{tg}\,\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = 36,87^\circ$$

$$\sigma_{zA} = \frac{3 \cdot 10}{2 \cdot \pi \cdot 4^2} \times \cos^5 0^\circ = \underline{\underline{0,298}}\ tf/m^2$$

$$\sigma_{zB} = \frac{3 \cdot 10}{2 \cdot \pi \cdot 4^2} \times \cos^5 (36,87)^\circ = \underline{\underline{0,098}}\ tf/m^2$$

Carga concentrada – Solução de Boussinesq

Jtilizando a solução de Boussinesq, determinar os acréscimos de pressão nos pontos A e B.



Solução:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = 36{,}87^\circ$$

$$\sigma_{zA} = \frac{3 \cdot 10}{2 \cdot \pi \cdot 4^2} \times \cos^5 0^\circ = \underline{\underline{0{,}298}}\ tf/m^2$$

$$\sigma_{zB} = \frac{3 \cdot 10}{2 \cdot \pi \cdot 4^2} \times \cos^5 (36{,}87)^\circ = \underline{\underline{0{,}098}}\ tf/m^2$$

ACRÉSCIMOS DE TENSÃO NO SOLO

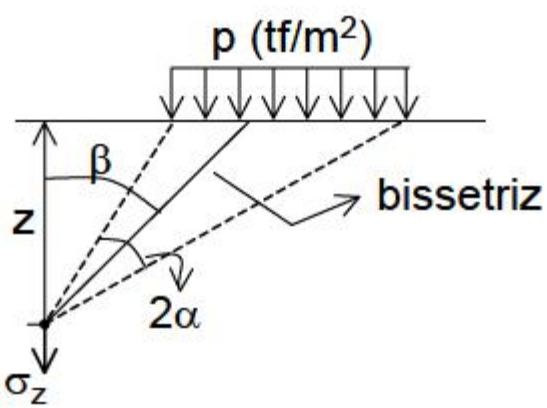
FÓRMULAS PARA CÁLCULO

Cálculo dos acréscimos de tensões verticais no solo.

- ***Carga distribuída ao longo de uma faixa-Solução de Carothers***

SOLUÇÃO DE CAROTHRES

Determina os acréscimos de tensões verticais devidos a um carregamento uniformemente distribuído ao longo de uma faixa de comprimento infinito e largura constante.



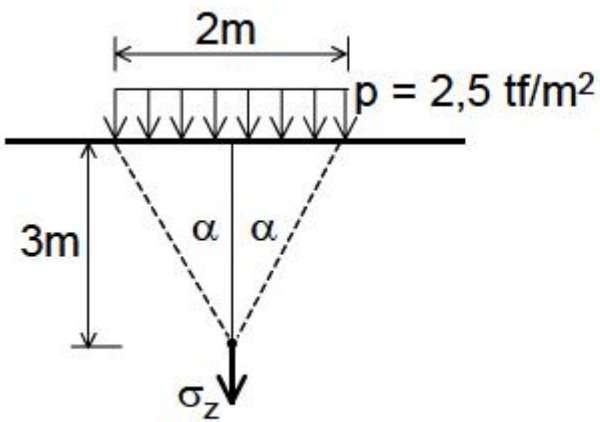
$$\sigma_z = \frac{p}{\pi} \cdot (\text{sen}2\alpha \cdot \cos 2\beta + 2\alpha)$$

No eixo da carga tem-se:

$$\sigma_z = \frac{p}{\pi} \cdot (\text{sen}2\alpha + 2\alpha)$$

Sendo α em radianos.

Uma fundação em sapata corrida com 2m de largura é carregada uniformemente por uma tensão igual a 2,5 tf/m^2 termine os acréscimos de tensão vertical (σ_z) devido ao carregamento em um ponto situado a 3 m abaixo do centro da fundação.



Solução:

$$\sigma_z = \frac{p}{\pi} \cdot (\text{sen}2\alpha + 2\alpha)$$

α em radianos.

Neste caso: $\beta = 0$

$$tg\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 18,43^\circ$$

$$2\alpha = 36,86^\circ = 0,643\ rad$$

$$sen2\alpha = 0,600$$

$$\sigma_z = \frac{2,5}{\pi} \cdot (0,600 + 0,643) = \underline{\underline{0,989}}\ tf/m^2$$

1 grau $= \frac{\pi}{180}\ radianos$

ACRÉSCIMOS DE TENSÃO NO SOLO

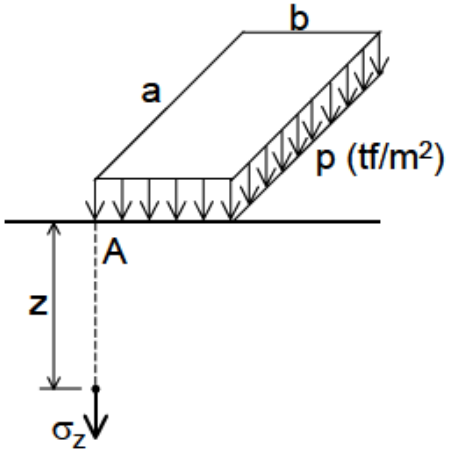
FÓRMULAS PARA CÁLCULO

Cálculo dos acréscimos de tensões verticais no solo.

- ***Carga distribuída sobre uma placa retangular -Solução de Steinebrenner***

SOLUÇÃO DE STEINBRENNER

Steinbrenner construiu um gráfico integrando a fórmula de Boussinesq que permite a determinação de σ_z a uma profundidade **z** abaixo do vértice A de um retângulo de lados *a* e *b* (a > b), uniformemente carregado por uma tensão *p*.



Solução Steinbrenner

Equação de Boussinesq

$$\sigma_z = \frac{P}{2\cdot\pi}\cdot\frac{3\cdot z^3}{\left(r^2+z^2\right)^{5/2}}$$

O ábaco de Streinbrenner é a solução gráfica da seguinte equação:

$$\sigma_z = \frac{p}{2\pi}\left\{arctg\left[\frac{b}{z}\cdot\frac{a\left(a^2+b^2\right)-2az\left(R-z\right)}{\left(a^2+b^2\right)\left(R-z\right)-z\left(R-z\right)^2}\right]+\frac{bz}{b^2+z^2}\cdot\frac{a\left(R^2+z^2\right)}{\left(a^2+z^2\right)R}\right\}$$

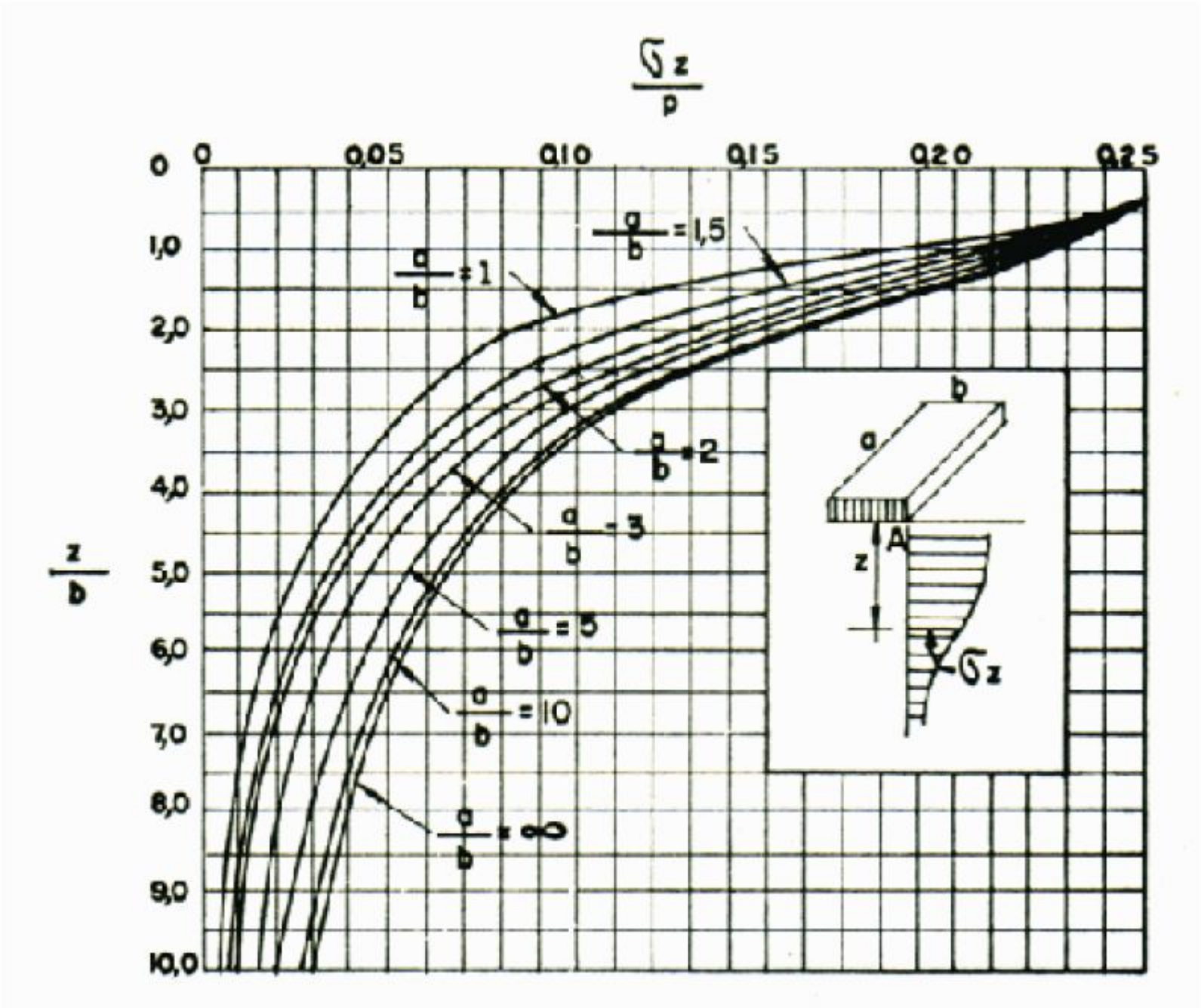
$$Onde:\ \ R=\sqrt{a^2+b^2+z^2}$$

$$\sigma_z = p\cdot I$$

Entrar no abaco: $\frac{a}{b}$ e $\frac{z}{b} \Rightarrow I$

Abaco $\rightarrow$ Caputo, Vol. 2, Cap. 3, Pag. 66

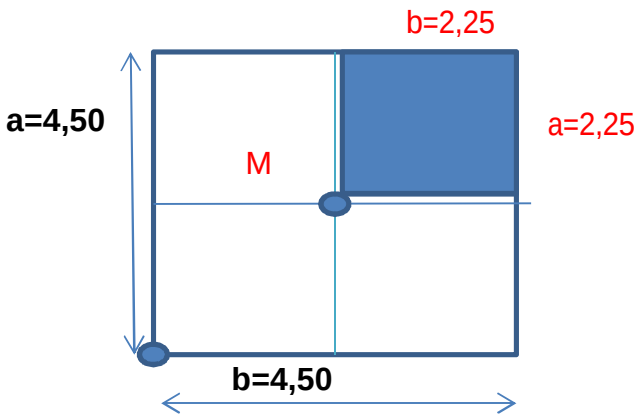
ABACO DE STEINBRENNER

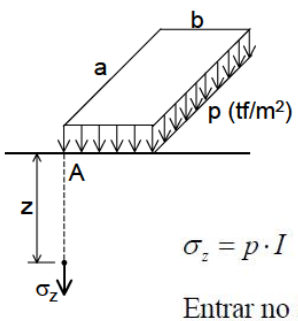


Exemplo: **Uma carga de 405 t é aplicada sobre uma <u>fundação quadrada de 4,50m de lado.</u>**

Determine: ***a)*** *a pressão vertical a 10 m de profundidade abaixo do centro da fundação;*

a=2m b=4,50m Q= 405 t z=10m





$\sigma_z = p \cdot I$

Entrar no abaco: $\frac{a}{b}$ e $\frac{z}{b} \Rightarrow I$

Abaco → Caputo, Vol. 2, Cap. 3, Pag. 66

Solução:

Neste caso tem-se que:

$$p = \frac{Q}{A} = \frac{405}{4{,}5 \times 4{,}5} = 20 t/m^2$$

Dividindo-se a fundação em 4 partes iguais , o lado do quadrado passa a ter 2,25 m.

Para

z/b= 10/2,25 = **4,4** e **a/b** = 2,25/2,25= **1**

obtém –se no gráfico: I= $\frac{\sigma_z}{p} = \mathbf{0{,}0375}$

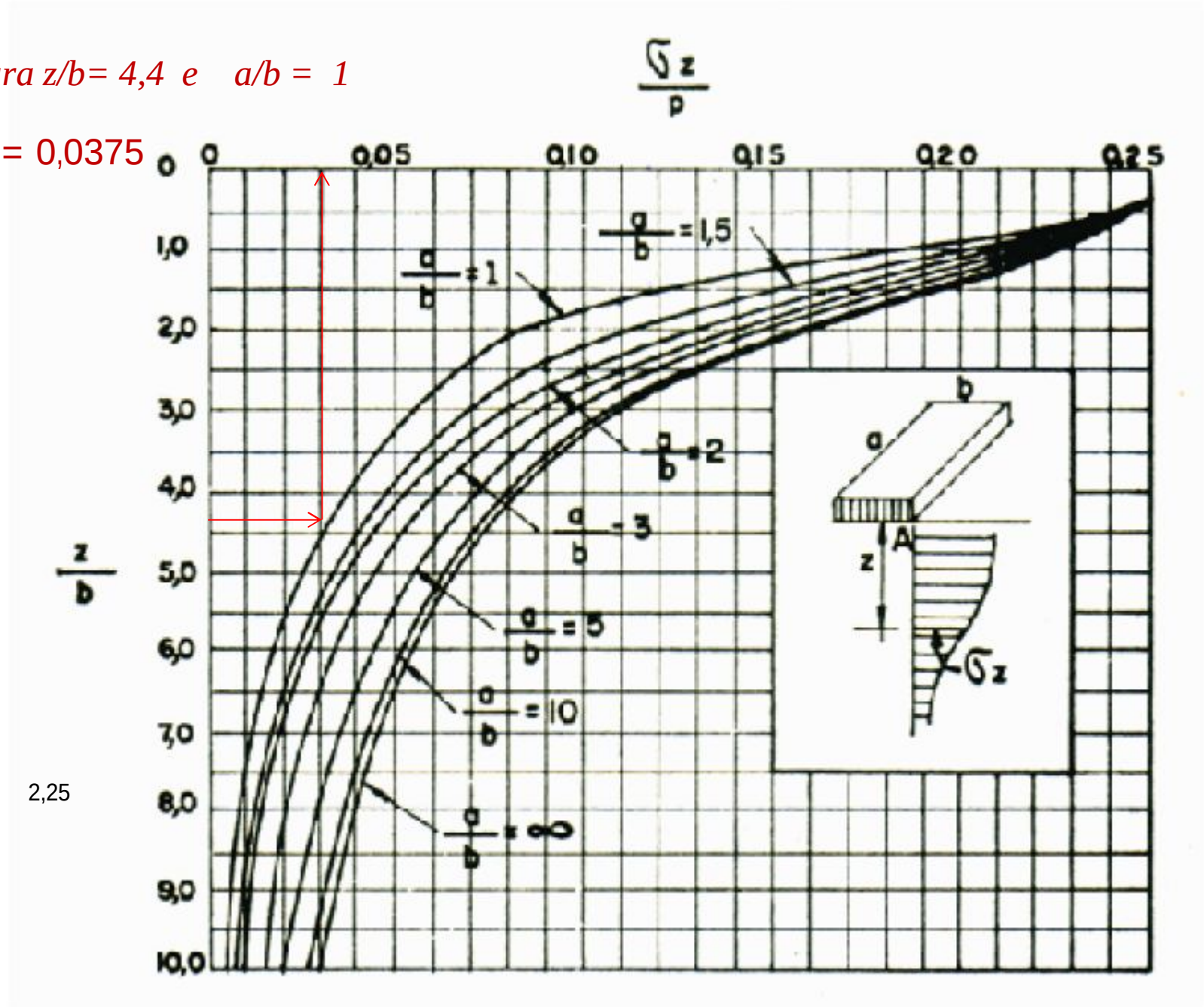
e daí

$$\frac{\sigma_z}{20} = p.I = \quad \boldsymbol{\sigma_z = (4) \times 20 \times 0{,}0375 = 3{,}0\ t/m2}$$

ABACO DE STEINBRENNER

Para z/b= 4,4 e a/b = 1

$\frac{\sigma_z}{p}$ = 0,0375

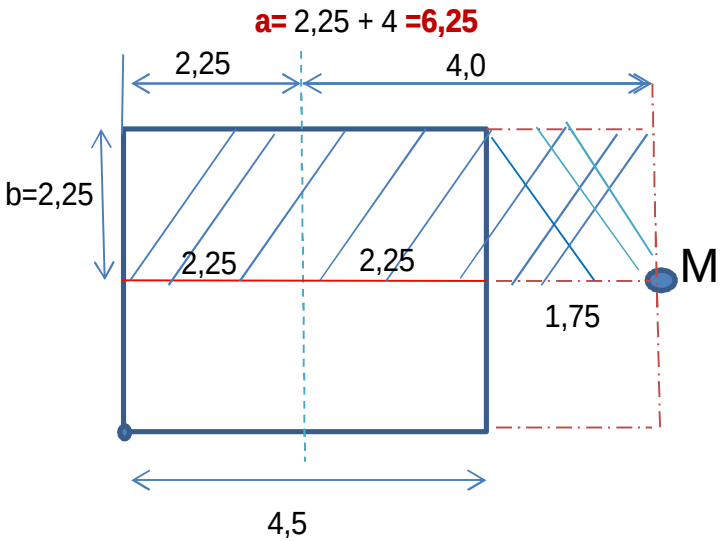


2,25

Exercício: **Uma carga de 405 t é aplicada sobre uma fundação quadrada de 4,50m de lado.**

Determine: ***b)*** *a pressão vertical a 3 m de profundidade e a 4m do seu do centro , sobre o seu eixo de simetria.*

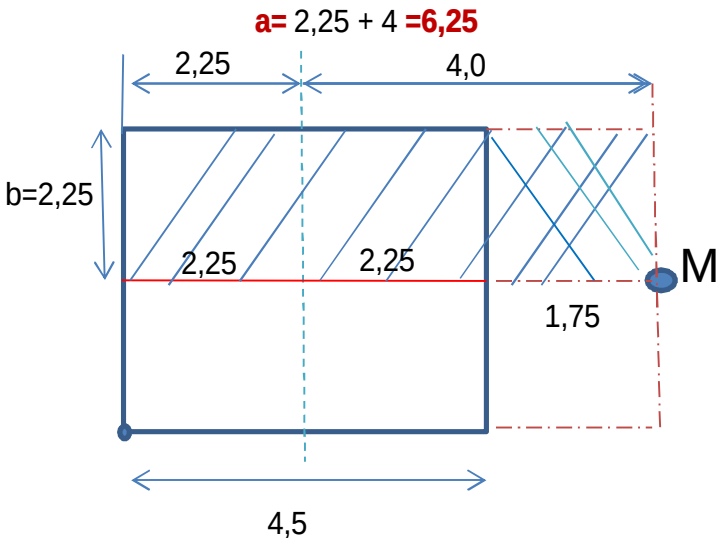
4,50m b=4,50m Q= 405 t z=3,00

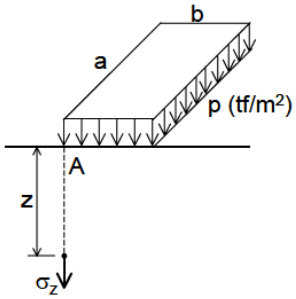


Exemplo: **Uma carga de 405 t é aplicada sobre uma fundação quadrada de 4,50m de lado.**

Determine: ***b)*** *a pressão vertical a 3 m de profundidade e a 4m do seu do centro , sobre o seu eixo de simetria.*

4,50m b=4,50m Q= 405 t z=3,00





Solução:

Considera-se a fundação estendida até M e o retângulo de dimensões:

Para o retângulo de dimensões estendida:

a=2,25 +4 =6,25 e b= 2,25

z/b= 3/2,25 =1,33

z/b=1,33 a/b= 6,25/2,25 = 2,77 no ábaco: $\frac{\sigma_z}{20}$ = 0,18

e para o retângulo de dimensões :

a=2,25 e b= 4 - 2 ,25 = 1,75

z/b=3,00/1,75=1,7 a/b=2,25/1,75= 1,3 no ábaco $\frac{\sigma_z}{20}$ = 0,12

Para a metade da superfície carregada temos

$\frac{\sigma_z}{20}$ = 0,18-0,12=0,06 σ_z = 20 × 0,06 = 1,2t/m²

e finalmente

para a superfície total carregada:

σ_z = 2 × 20 × 0,06 = 2,4t/m²

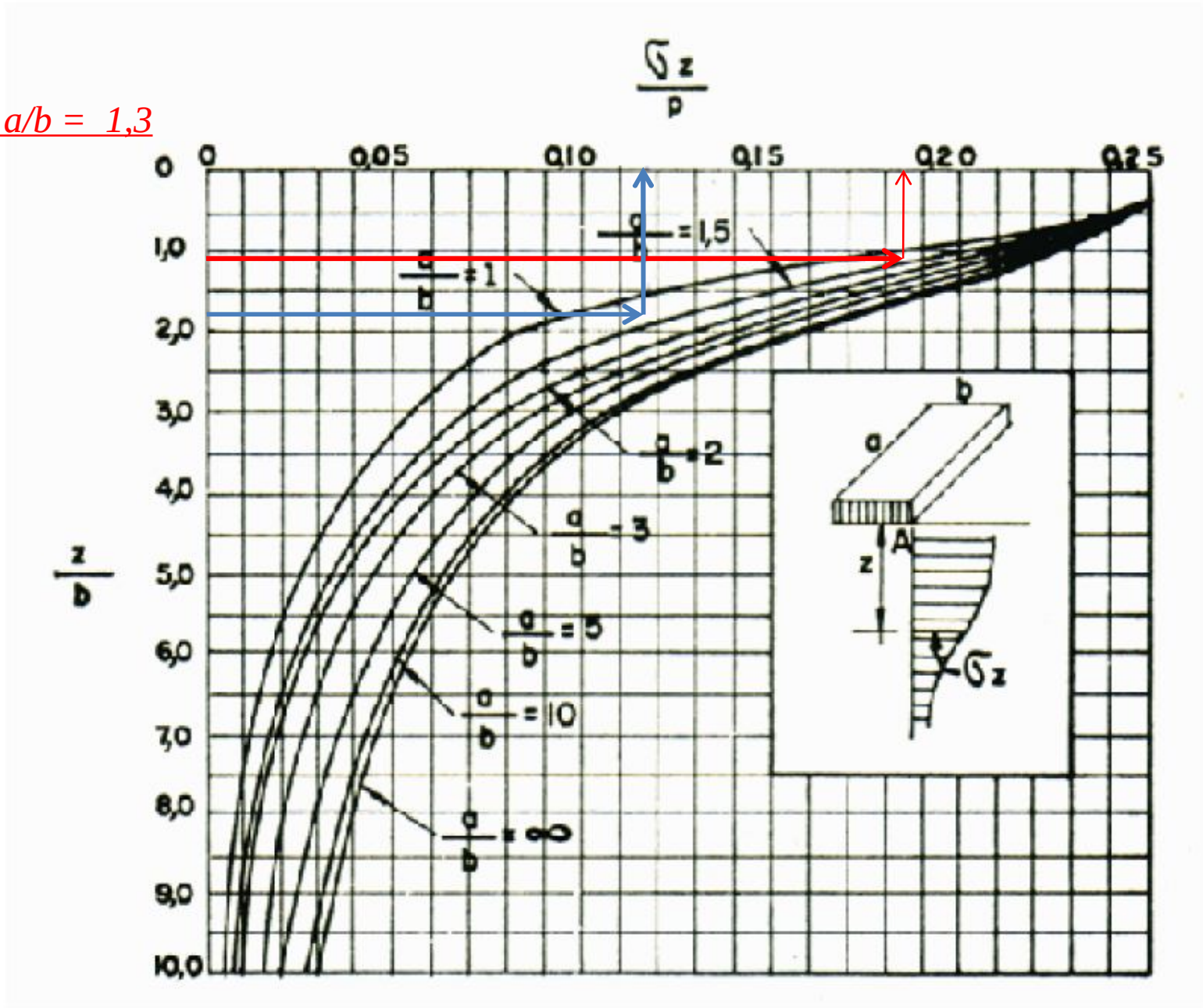
ÁBACO DE STEINBRENNER

z/b= 1,3 e a/b = 2,8

$\frac{\sigma_z}{p} = 0{,}18$

z/b= 1,7 e a/b = 1,3

$\frac{\sigma_z}{p} = 0{,}12$

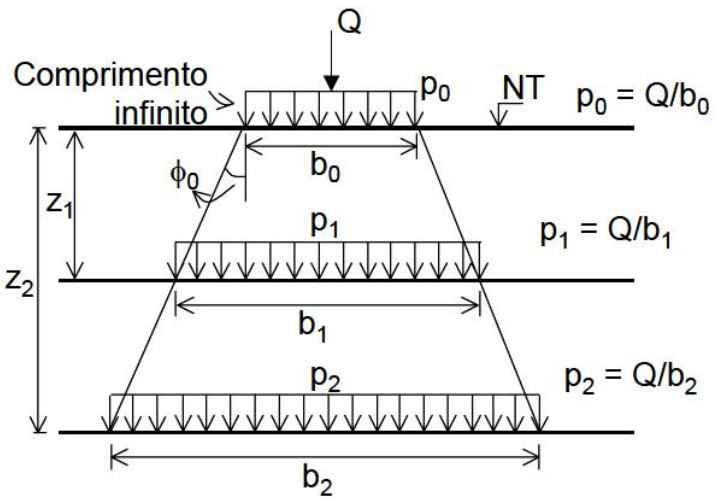


ACRÉSCIMOS DE TENSÃO NO SOLO

FÓRMULAS PARA CÁLCULO

Hipótese simples – Tensões de espraiamento

Uma prática corrente para se estimar o valor das tensões em certa profundidade consiste em considerar que as tensões se espraiam segundo áreas crescentes, mas sempre se mantendo uniformemente distribuídas.



Onde: ϕ_0 = ângulo de espraiamento.

Solos muito moles $\phi_0 < 40°$;

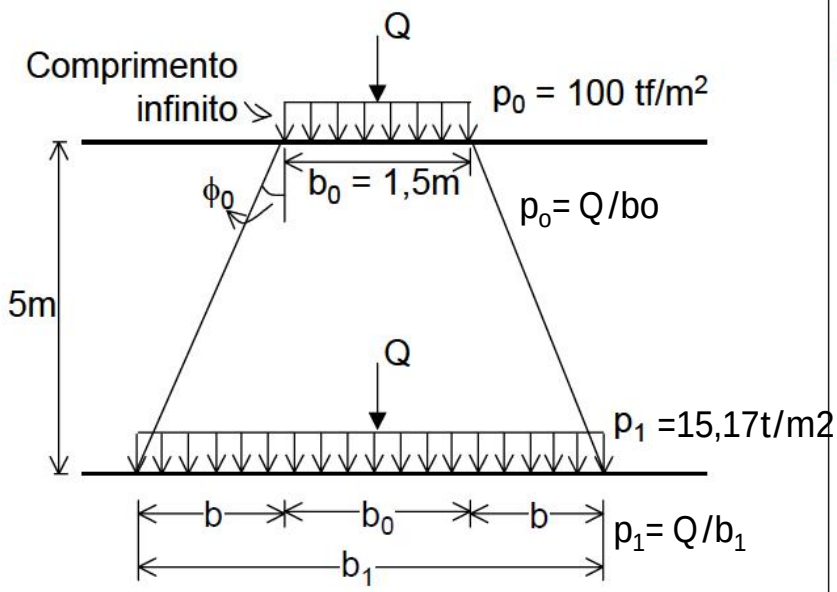
Areias puras $\phi_0 \cong 40°$ a $45°$;

Argilas rijas e duras $\phi_0 \cong 70°$;

Rochas $\phi_0 > 70°$.

Hipótese simples – Tensões de espraiamento

Exemplo: Calcular a tensão no plano situado à profundidade de 5 metros, considerando que a área carregada tem comprimento infinito. Considerar areia pura (ϕ0 = 40º).



Solução:

$$\operatorname{tg}\phi_0 = b/5,0 \Rightarrow b = 5,0 \times \operatorname{tg}40^\circ$$

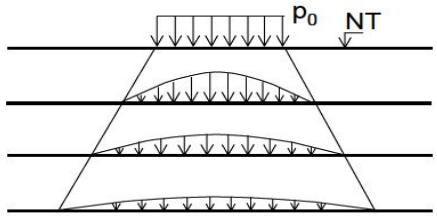
$$b_1 = 2b + 1,5 = 9,89m$$

$$Q = p_0 \cdot b_0 = p_1 \cdot b_1 \quad =4,19$$

$$p_1 = \frac{p_0 \cdot b_0}{b_1} = \frac{100 \times 1,5}{9,89}$$

$$p_1 = \underline{\underline{15,17}}\ tf/m^2$$

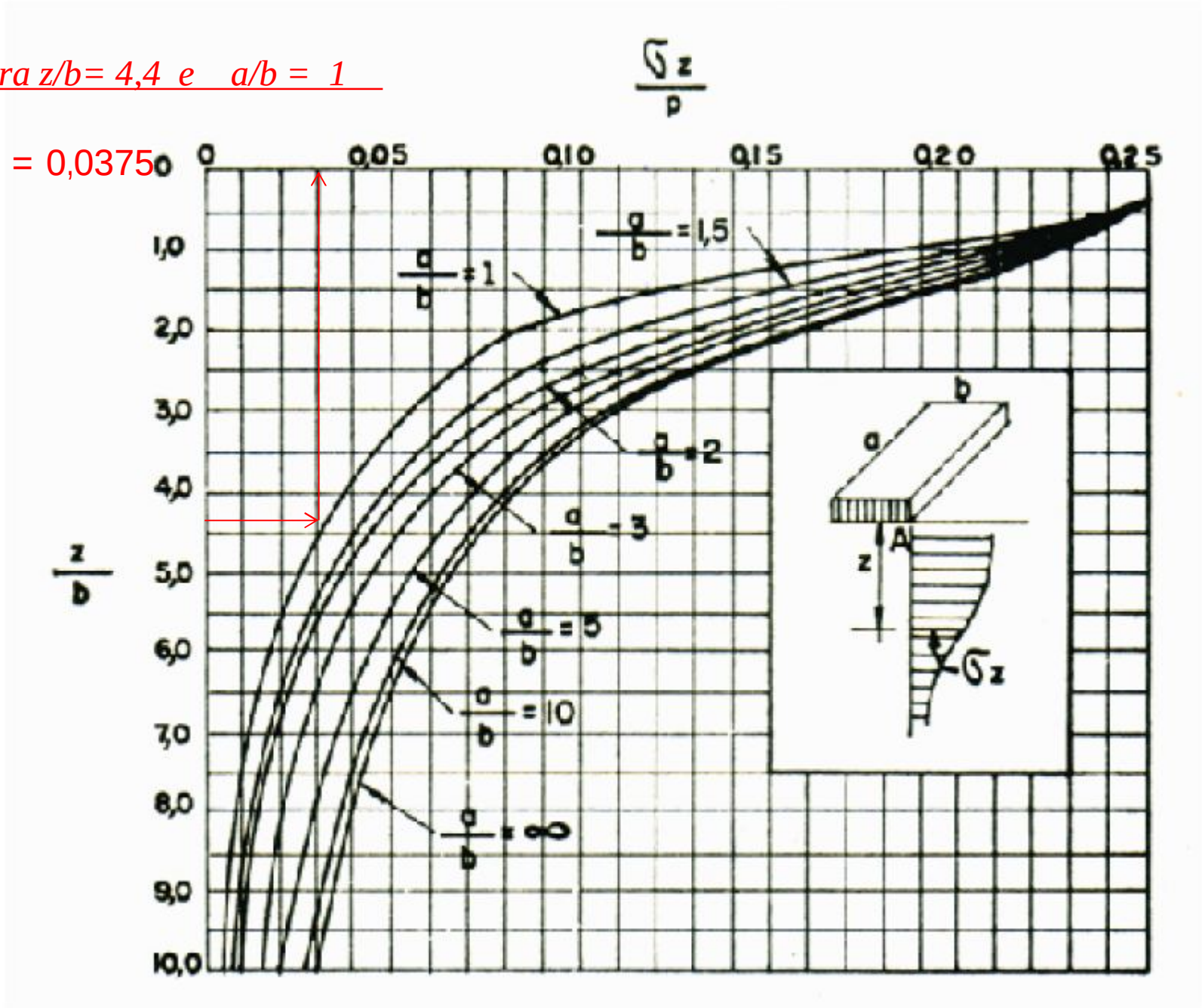
Obs.: Esse método deve ser entendido como uma estimativa grosseira, pois as tensões em uma determinada profundidade não são uniformemente distribuídas, mas se concentram na proximidade do eixo de simetria da área carregada, apresentando a forma de um sino.



ABACO DE STEINBRENNER

Para z/b= 4,4 e a/b = 1

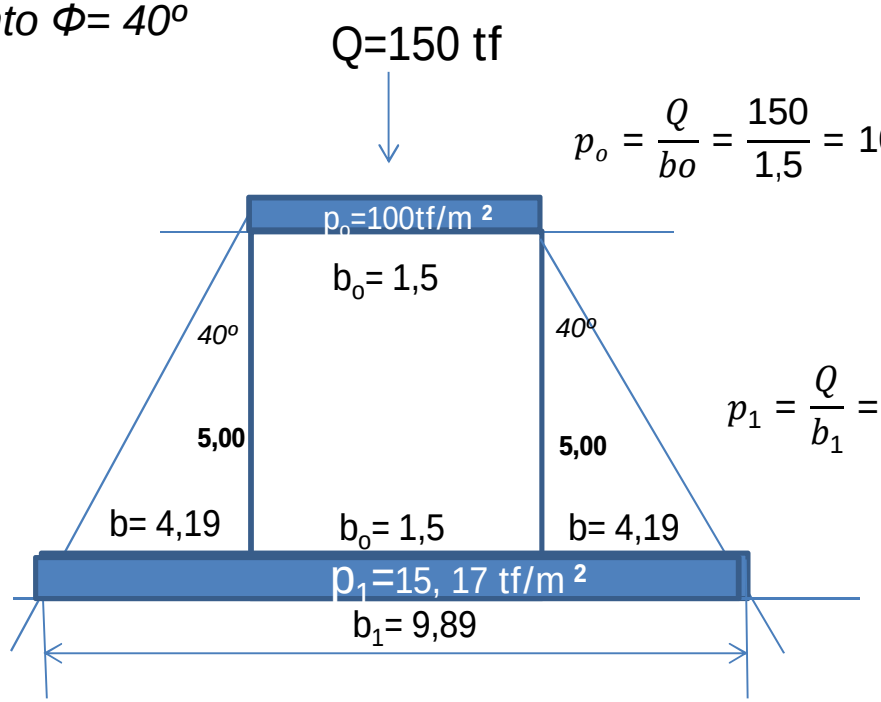
$\frac{\sigma_z}{p}$ = 0,0375



Exemplo: Estimar o valor da tensão na profundidade de 5m, considerando*:*

Areia pura – ângulo de espraiamento Φ= 40º

Q= 150 tf b_o=1,5m



$$p_o = \frac{Q}{bo} = \frac{150}{1{,}5} = 100$$

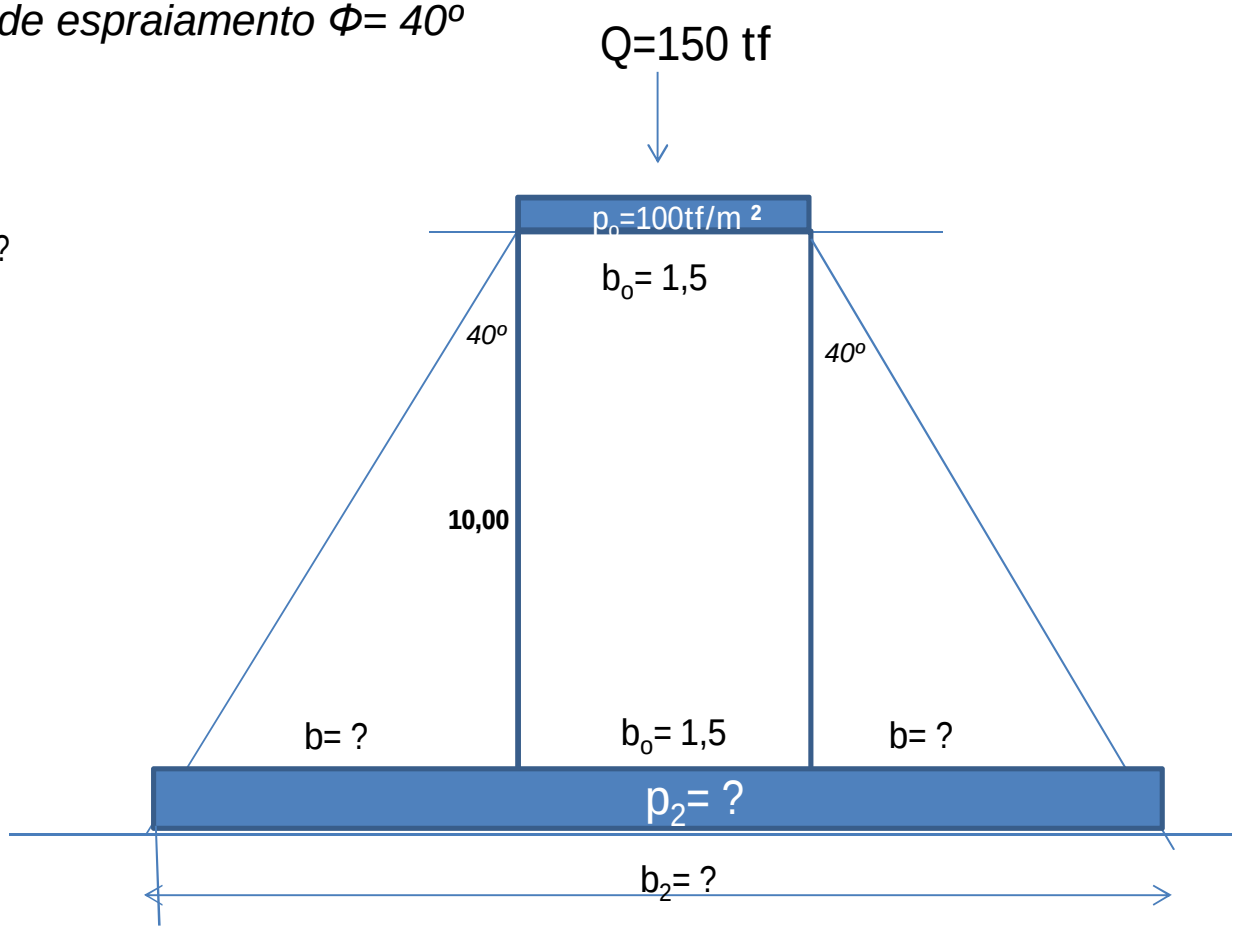
$$p_1 = \frac{Q}{b_1} = \frac{150}{9{,}89} = 15{,}17$$

Exercício: Estimar o valor da tensão na profundidade de 10 m, considerando*:*

Areia pura – ângulo de espraiamento Φ= 40º

Q= 150 tf b_o=1,5m

$$p_2 = \frac{Q}{b_2} = \frac{150}{b2} = ?$$



Exercício: Estimar o valor da tensão na profundidade de 10 m, considerando*:*

Areia pura – ângulo de espraiamento Φ= 40º

Q= 150 tf b_o=1,5m

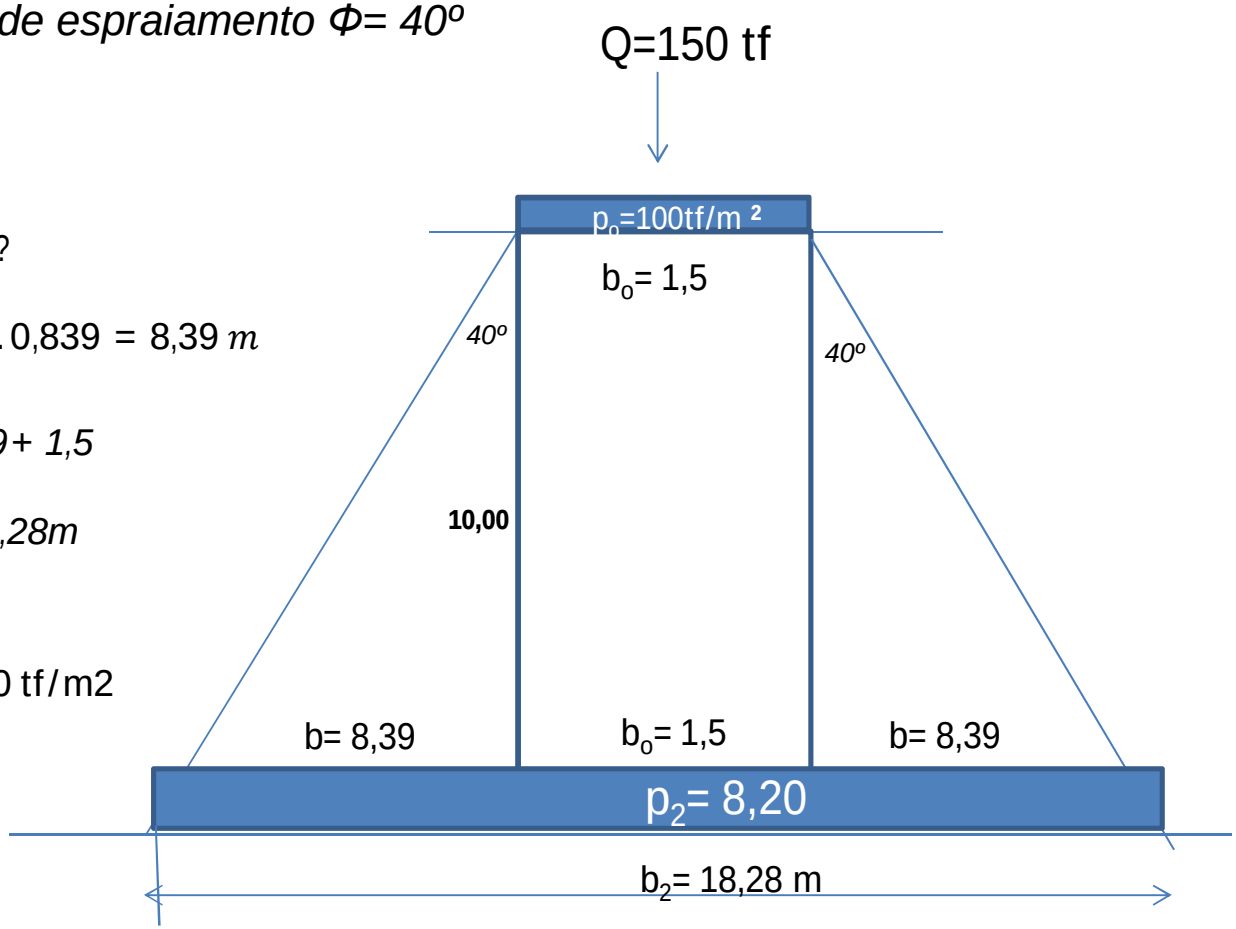
$$p_2 = \frac{Q}{b_2} = \frac{150}{b2} = ?$$

$$b = 10.tg\,40 = 10\,.\,0{,}839 = 8{,}39\,m$$

$$b_2 = 2b + bo = 2\,.\,8{,}39 + 1{,}5$$

$$b_2 = 16{,}78 + 1{,}5 = 18{,}28m$$

$$p_2 = \frac{Q}{b_2} = \frac{150}{18{,}28} = 8{,}20\ tf/m2$$



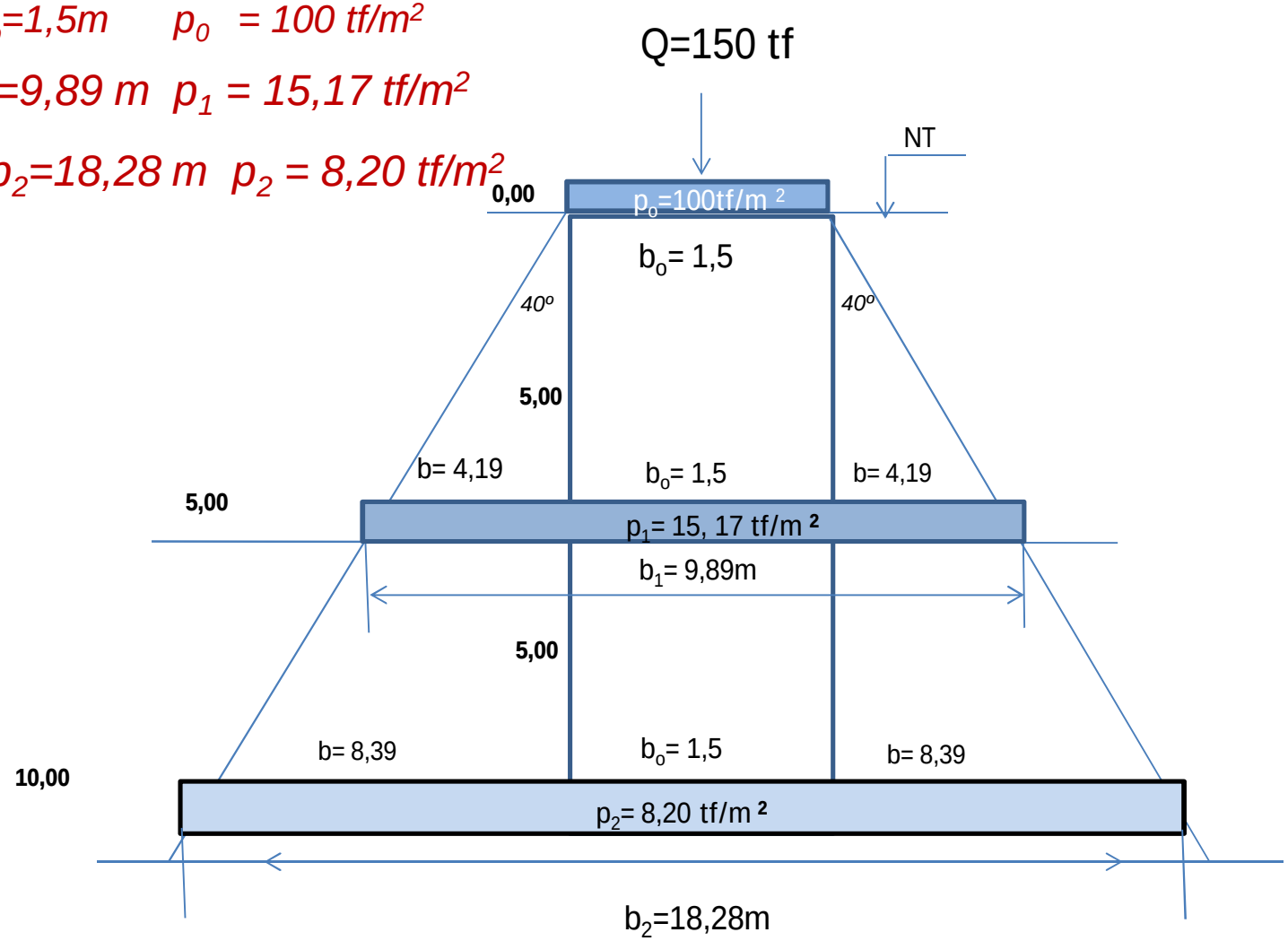
Considerando:

Areia pura – ângulo de espraiamento Φ= 40º *Q= 150 tf*

NT = 0.00 *b_o=1,5m* *p_0 = 100 tf/m²*

prof= 5,00m *b_1=9,89 m* *p_1 = 15,17 tf/m²*

prof= 10,00m *b_2=18,28 m* *p_2 = 8,20 tf/m²*

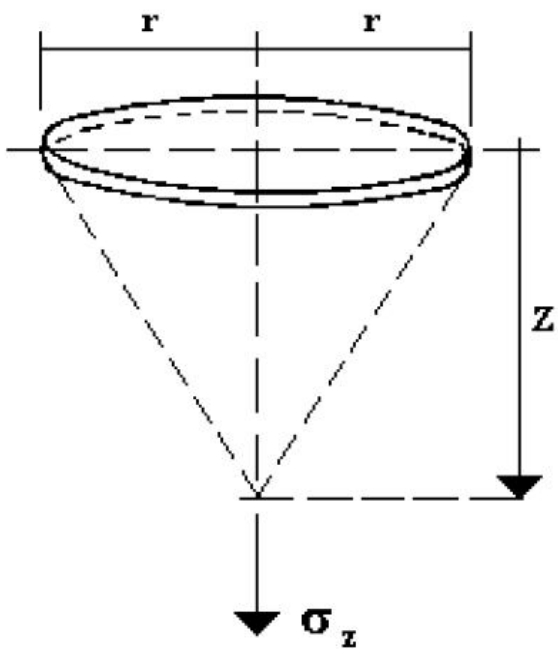


ACRÉSCIMOS DE TENSÃO NO SOLO

FÓRMULA DE LOVE

Carga distribuída sobre uma placa circular:

Para uma superfície flexível e circular de raio R, carregada uniformemente com **pressão P,** o valor da pressão vertical σ_z , abaixo do centro é dado pela fórmula de Love. (Figura 1)



$$\sigma_Z = p.\left\{1 - \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{r}{z}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

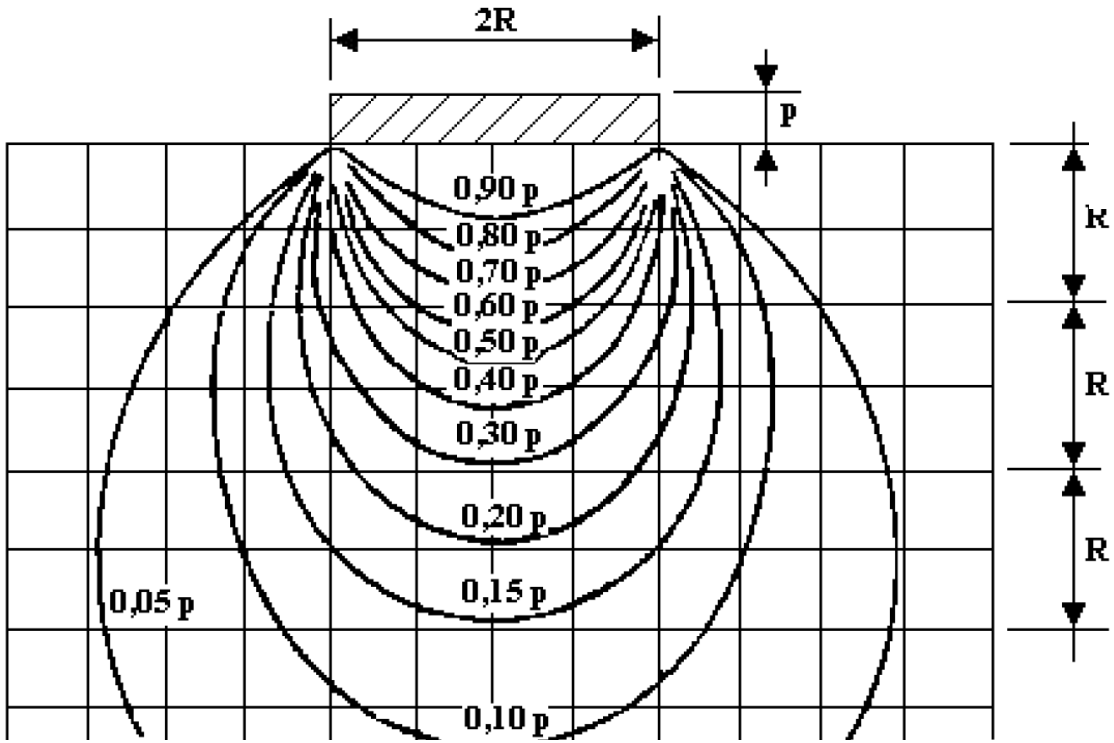
ACRÉSCIMOS DE TENSÃO NO SOLO

FÓRMUL A DE LOVE

Carga distribuída sobre uma placa circular:

O bulbo de pressão correspondente está indicado na Figura

$$\sigma_Z = p.\left\{1 - \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{r}{z}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}$$



ACRÉSCIMOS DE TENSÃO NO SOLO

FÓRMUL A DE LOVE

Esse sistema de carregamento é usado em alguns métodos de projeto de pavimento. Na prática esta fórmula é de emprego rápido e fácil, fazendo-se:

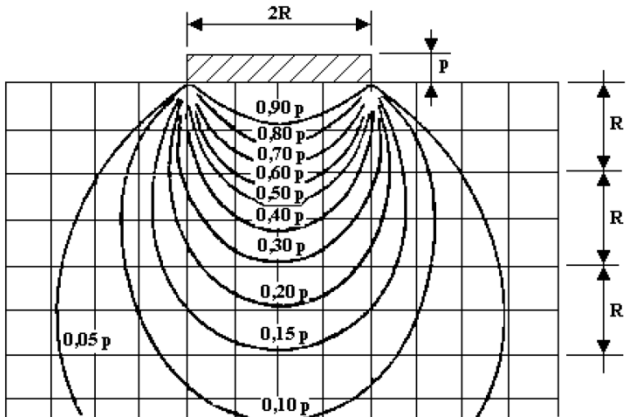
$$I = 1 - [\ 1 / 1 + (R/z)^2\ ]^{3/2}$$

I = fator de influência para diferentes valores de R /z → $\sigma_z = p,I$

R/Z	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3,0	3,5	4	5	00
I	0	0,284	0,646	0,829	0,941	0,949	0,968	0,979	0,986	0,992	1

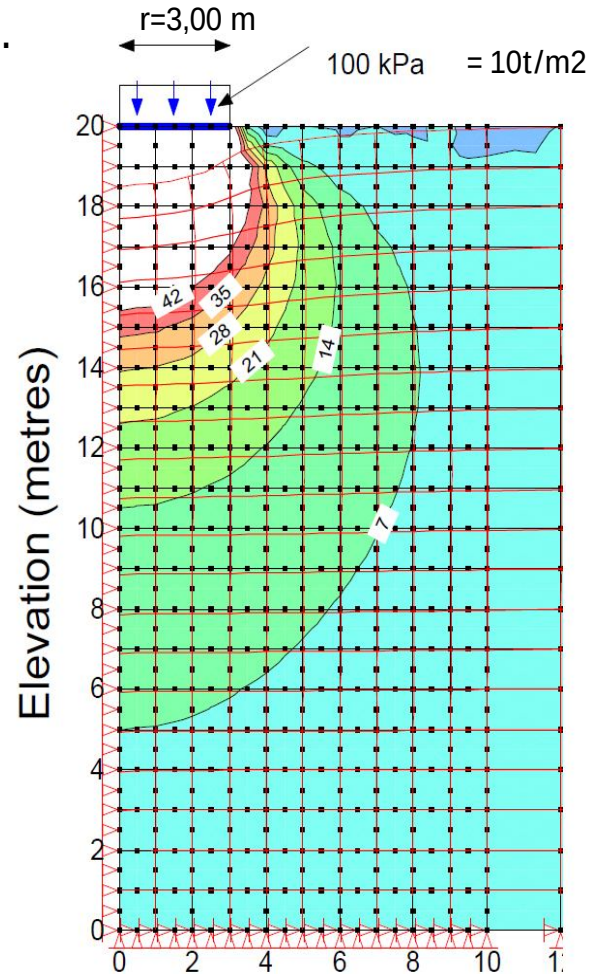
$$\sigma_z = p.\left\{1 - \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{r}{z}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

$$\sigma_z = p.I$$



ACRÉSCIMOS DE TENSÃO NO SOLO

A figura abaixo ilustra, como exemplo, o aspecto da distribuição da intensidade das tensões verticais que ocorrem no subsolo de um terreno (**mostrada a meia seção**), considerando a aplicação na superfície de um carregamento externo de 100kPa.



100mKPa = 1kgf/cm2= 10t/m2

Unidades:

1 kN = 0,1 t

1 t/m2 = 10 kPa

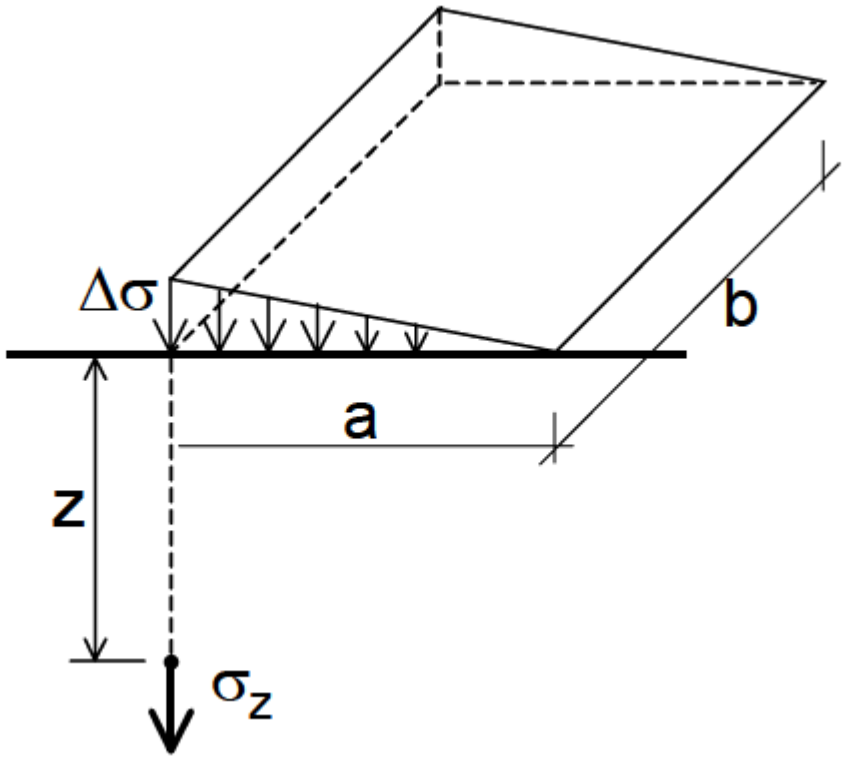
1 kgf = 9,81 N

1 kgf/cm2 = 10 t/m2

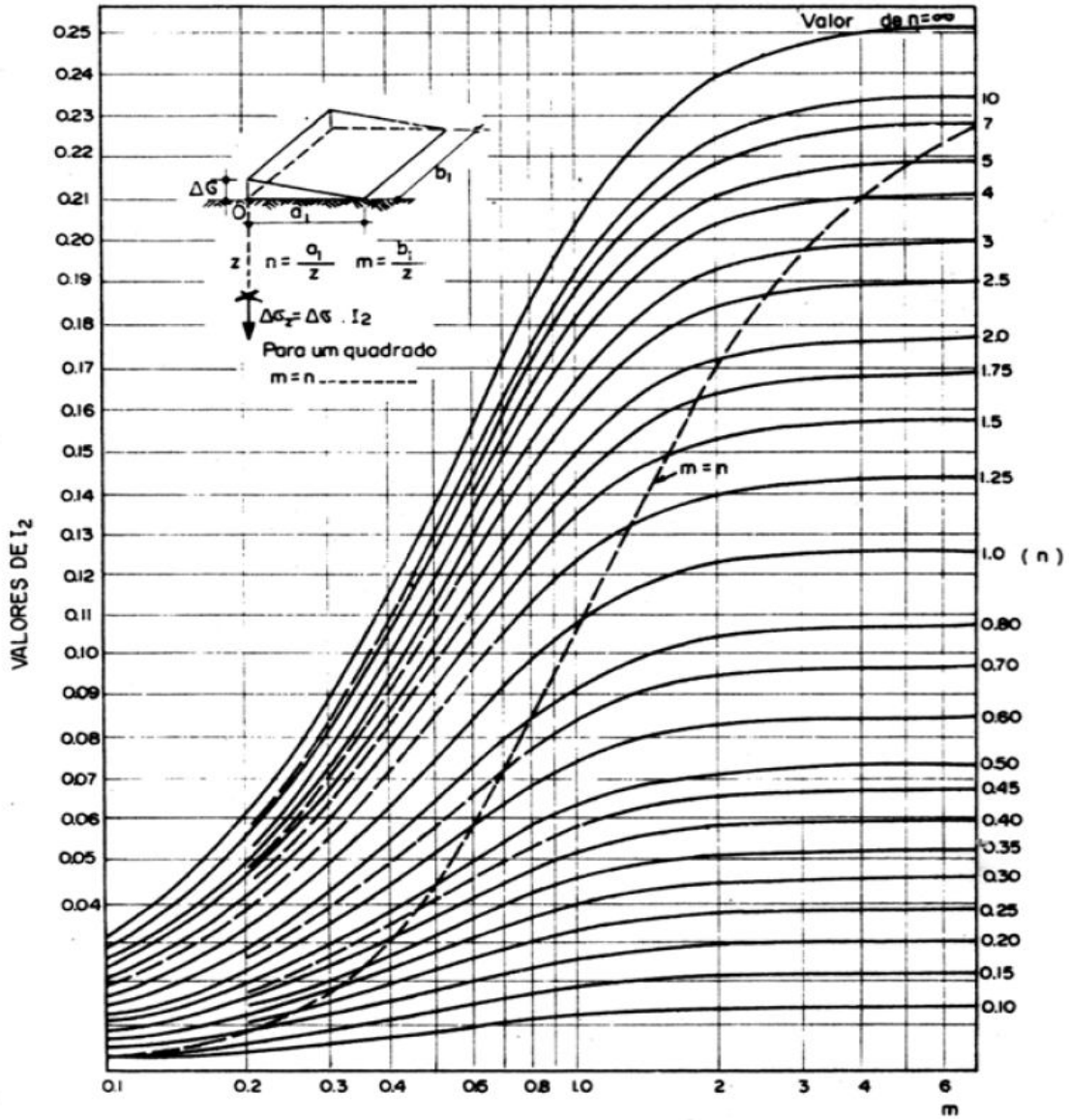
1 kgf/cm2 = 100 kPa

ACRÉSCIMOS DE TENSÃO NO SOLO
Carregamento Triangular
Gráfico de Fadum

Permite determinar *o* *acréscimo de tensão vertical* (σ_z) sob um carregamento triangular de comprimento finito.



ÁBACO DE FADUM



Exemplo: Calcular a tensão no plano situado à profundidade de 6 metros, considerando que a área carregada (aterro de areia compacta) com altura de 3,00 m a= 5m e b=7m.

Aterro : γ = 2,0t/m2 (areia compacta) h = 3,00m a= 5m b= 7m z= 6m

$\Delta\sigma = \gamma h = 2.\ 3 = 6t/m2$

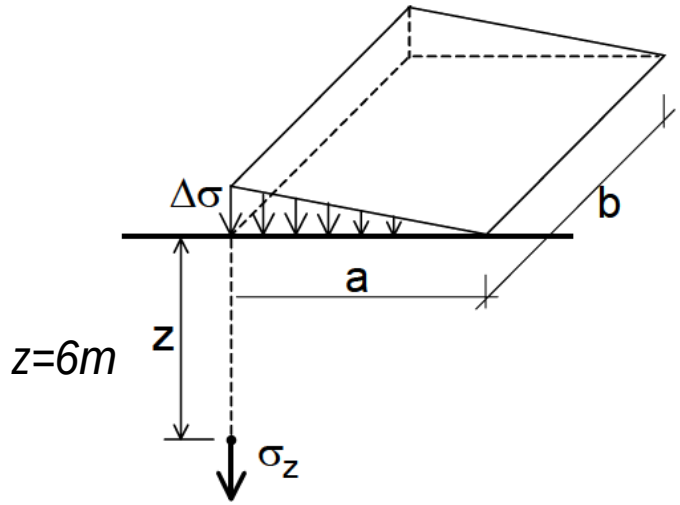
$m = b/z = 7/6 = \mathbf{1,16}$

$n = a/z = 5/6 = \mathbf{0,83}$

no gráfico I = 0,11

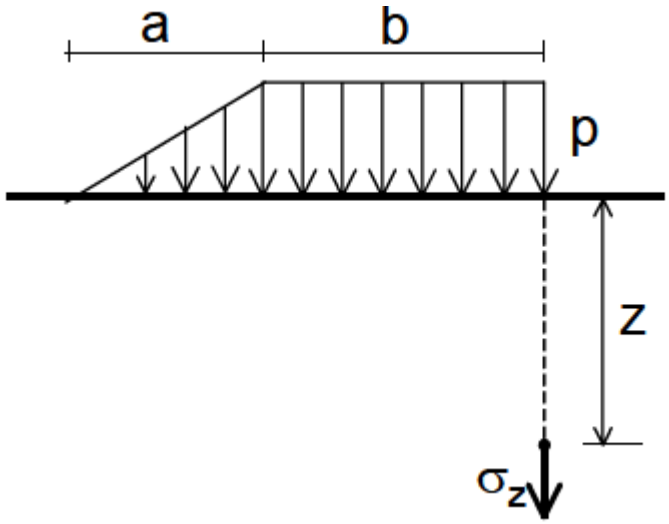
$\sigma_z = \Delta\sigma . I$

$\sigma_z = 6.\ 0,11 = 0,66t/m2$



ACRÉSCIMOS DE TENSÃO NO SOLO
Carregamento Trapézio Retangular
Gráfico de Osterberg

Permite calcular o acréscimo de tensão devido a uma carga em forma de trapézio retangular, infinitamente longo.

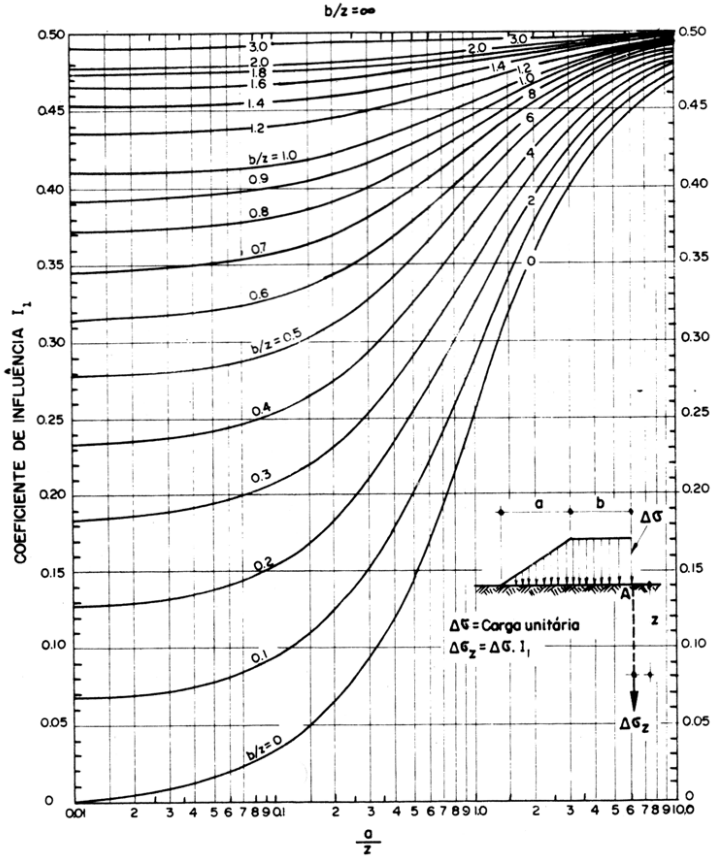


Através do gráfico de Osterberg , obtém-se:

$$\sigma_z = \Delta\sigma \cdot I$$

Gráfico de Osterberg: Caputo, Vol 2, Cap. 3.

Ábaco de Osterberg



Através do gráfico de Osterberg , obtém-se:

$$\sigma_z = \Delta\sigma \cdot I$$

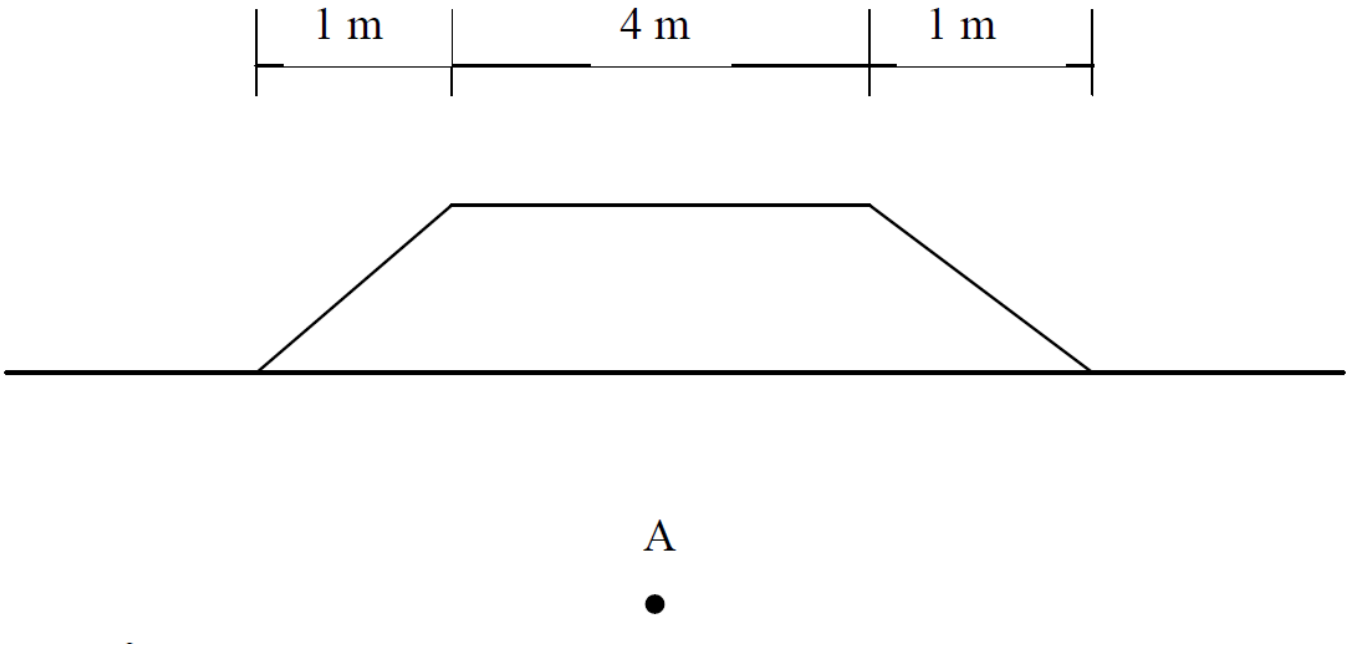
Gráfico de Osterberg: Caputo, Vol 2, Cap. 3.

ACRÉSCIMOS DE TENSÃO NO SOLO
ATERRO

EXERCICIO

Qual a variação de tensão ocasionada por um aterro trapezoidal com peso específico total de 2 t/m3 e 2 m de altura, conforme as profundidades e distancias indicadas, na figura abaixo?

a. sob eixo de simetria do carregamento a 1 m de profundidade.



Resposta: 3,52 t/m^2